



UNIVERSITAT DE  
BARCELONA

Treball final de grau

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Facultat de Matemàtiques i Informàtica  
Universitat de Barcelona

---

INTRODUCCIÓ A LA  
DINÀMICA SIMBÒLICA.  
Aplicació al Problema de Sitnikov

---

Autor: Andrea Toloba López-Egea

Director: Dr. Ernest Fontich Julià

Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica  
Barcelona, 27 de juny de 2018

# Abstract

This dissertation is divided into two parts. In the first part, we study the shift homeomorphism for a finite or denumerable alphabet set and we give sufficient conditions to conjugate an application in a Cantor subset of the domain with the shift. These conjugations have very important dynamic consequences. In the second part, we apply the results to Sitnikov's problem. This is a restricted three body problem in which two bodies describe elliptic orbits while the center of mass is at rest. The third body is moving on a line perpendicular to the plane of motion of the first two bodies and going through the center of mass. The goal is to describe the motion of the third mass point which is periodically excited by the first two. This way we get the existence of a wide variety of oscillatory movements for this problem.

# Resum

Aquest treball està dividit en dues parts. En la primera, es fa un estudi de l'aplicació shift de Bernoulli, amb un nombre finit o infinit de símbols, i es donen condicions suficients per a que una aplicació, en un subconjunt cantorà del seu domini, sigui conjugada a aquesta. Aquesta conjugació té conseqüències dinàmiques molt importants. En la segona part, s'apliquen els resultats al problema de Sitnikov. Aquest és un cas restringit del problema de tres cossos en el que dos d'ells, anomenats primaris, orbiten en un pla. El tercer cos es mou en una recta perpendicular a aquest pla, passant pel centre de masses, sotmès a la força dels primaris. Així s'obté l'existència d'una àmplia varietat de moviments oscil·latoris per aquest problema.

# Índex

<b>1</b>	<b>Introducció</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>El shift de Bernoulli</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Conjugació a la dinàmica del shift</b>	<b>6</b>
3.1	Primeres condicions . . . . .	8
3.2	Compacitat de $\bar{\mathcal{S}}$ . . . . .	13
3.3	Condició alternativa . . . . .	16
<b>4</b>	<b>El problema de Sitnikov</b>	<b>19</b>
4.1	Plantejament del problema . . . . .	19
4.2	Definició de l'aplicació $\phi$ . . . . .	20
4.3	Propietats de $\phi$ . . . . .	25
4.4	Conjugació de $\phi$ amb el shift . . . . .	34
4.5	Conjunt de símbols . . . . .	37
<b>5</b>	<b>Conclusions</b>	<b>39</b>

# 1 Introducció

## El projecte

Encara que el mètode de caracteritzar òrbites per successions de símbols ja era conegut prèviament, va ser Smale [5] el primer en utilitzar-lo d'una manera més geomètrica. Per a fer-nos una idea, a Hadamard [4], que va ser escrit en el 1898, s'utilitza per analitzar geodèsiques que es troben en superfícies amb curvatura negativa.

La proposta de Smale consisteix en suposar que tenim una aplicació topològica  $\phi$  definida en un quadrat  $Q \subset \mathbb{R}^2$ . Aquesta aplicació doblega  $Q$  de tal manera que  $\phi(Q) \cap Q$  té dues components connexes, les quals s'anomenen bandes horitzontals. Les antiimatges per  $\phi$  d'aquestes s'anomenen bandes verticals. Aleshores, Smale troba la manera de relacionar la dinàmica de  $\phi$  en un subconjunt d'aquestes bandes amb l'aplicació shift definida en l'espai de successions, on agafa  $\{1, 2\}$  com a conjunt de símbols. Avui en dia, a aquesta aplicació se l'anomena horseshoe.

Cinc anys abans, Sitnikov [6] havia proposat i estudiat el problema restringit de tres cossos que es descriu en aquest treball. Entre altres resultats, va descobrir l'existència de solucions que creuen el pla dels primaris infinits cops.

Cinc anys després de la proposta, Alekseev [7], [8] va sistematitzar la idea d'Smale utilitzant-la per a estudiar el Problema de Sitnikov. Moser va recollir tota la informació i la va plasmar en el seu llibre 'Stable and Random Motions in Dynamical Systems' [1], ampliant-ho amb detalls.

Aquest treball està centrat en el llibre de Moser. S'ha respectat la notació proposada, encara que s'ha organitzat el contingut de la manera que ha semblat més convenient. Algunes de les demostracions estan inspirades en Wiggins [3], i d'altres s'han reproduït de forma més o menys fidedigna, tot ampliant algunes justificacions.

## Estructura de la Memòria

En el capítol 2 s'introdueix el shift de Bernoulli i es donen propietats característiques d'aquest. Com per exemple, el caos que el caracteritza. També es parla del caràcter cantorià que té l'espai on està definida en el cas de finitud de símbols.

En el capítol 3 es demostra que si una aplicació compleix certes propietats, aleshores és conjugada al shift. També es parla de com compactificar l'espai de successions en el cas de que el conjunt de símbols sigui infinit, ja que és necessari per a que l'aplicació que conjuga sigui homeomorfisme.

En l'últim capítol s'estudien les solucions del problema de Sitnikov utilitzant la conjugació amb el shift. S'analitzen els resultats i es dona el teorema final, el qual relaciona l'espai de successions amb un conjunt de solucions del problema.

## 2 El shift de Bernoulli

Sigui  $\mathcal{A} = \{1, 2, \dots, N\}$  o  $\mathcal{A} = \mathbb{N}$ , que anomenarem conjunt de símbols. Sigui  $\mathcal{S}$  l'espai format per successions doblement infinites d'elements d' $\mathcal{A}$ , és a dir

$$\mathcal{S} = \{s = (\dots, s_{-2}, s_{-1}, s_0; s_1, s_2, \dots) \mid s_k \in \mathcal{A}, \forall k \in \mathbb{Z}\}.$$

Dotem  $\mathcal{S}$  d'una estructura d'espai mètric: Donats dos elements  $s, s' \in \mathcal{S}$ , definim

$$d(s, s') = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2^{|k|}} \frac{|s_k - s'_k|}{1 + |s_k - s'_k|}.$$

**Proposició 2.1.** *L'operador  $d : \mathcal{S} \times \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^+$  és una distància a  $\mathcal{S}$ .*

*Demostració.* Observem que  $\frac{|s_k - s'_k|}{1 + |s_k - s'_k|} \leq 1$ . Aleshores, com que és una suma de termes positius i

$$d(s, s') \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2^{|k|}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1 + 2 = 3,$$

$d$  pren valors a  $[0, 3]$ . A més, pel fet de ser suma de termes positius, si  $d(s, s') = 0$  aleshores  $|s_k - s'_k| = 0$  per a tot  $k \in \mathbb{Z}$  i, per tant,  $s = s'$ . És fàcil veure que  $d(s, s) = 0$ .

La simetria de  $d$  es dedueix de que  $|s_k - s'_k| = |s'_k - s_k|$ . Per a demostrar la desigualtat triangular, és suficient fer-ho per a un terme  $k$ -èsim de la suma, ja que aquests són positius. Siguin  $s, s', s'' \in \mathcal{S}$ , posem  $a = |s_k - s'_k|$ ,  $b = |s_k - s''_k|$  i  $c = |s'_k - s''_k|$ . Si veiem que

$$\frac{a}{1+a} \leq \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c},$$

aleshores haurem demostrat que  $d(s, s') \leq d(s, s'') + d(s'', s')$ . Observem que, per a la desigualtat triangular en  $\mathbb{R}$ ,  $a \leq b + c$ . Així, com que  $f(x) = \frac{x}{1+x}$  és creixent,

$$\frac{a}{1+a} \leq \frac{b+c}{1+b+c} = \frac{b}{1+b+c} + \frac{c}{1+b+c}.$$

Com que  $1+b+c$  pren valors més grans o iguals que  $1+b$  i que  $1+c$ , podem acotar els quocients obtinguts pels quocients de la desigualtat que ens interessa.  $\square$

El següent lema ens dona estimacions quantitatives de la distància.

**Lema 2.2.** *Siguin  $s, s'$  dos elements de  $\mathcal{S}$ . Es compleix:*

- (i) *Si existeix  $M \in \mathbb{N}$  tal que  $d(s, s') < \frac{1}{2^{M+1}}$ , aleshores  $s_k = s'_k$  per a tot  $|k| \leq M$ .*
- (ii) *Si existeix  $M \in \mathbb{N}$  tal que  $s_k = s'_k$  per a tot  $|k| \leq M$ , aleshores  $d(s, s') \leq \frac{1}{2^{M-1}}$ .*

*Demostració.* La primera part de la demostració es pot fer pel contrarecíproc. Suposem que  $\exists j$  tal que  $|j| \leq M$  i  $s_j \neq s'_j$ . Com que els termes de  $d$  són positius i  $|s_j - s'_j| \geq 1$ ,

$$d(s, s') \geq \frac{1}{2^{|j|}} \frac{|s_j - s'_j|}{1 + |s_j - s'_j|} \geq \frac{1}{2^{|j|}} \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2^{M+1}}.$$

Fet que contradiu la hipòtesi i, per tant, (i) queda demostrat.

Demostrem la segona part del lema de forma directa. Com que  $s_k = s'_k$  per a tot  $|k| \leq M$ ,

$$\begin{aligned} d(s, s') &= \sum_{k=-(M+1)}^{-\infty} \frac{1}{2^{|k|}} \frac{|s_k - s'_k|}{1 + |s_k - s'_k|} + \sum_{k=M+1}^{\infty} \frac{1}{2^{|k|}} \frac{|s_k - s'_k|}{1 + |s_k - s'_k|} \\ &\leq 2 \sum_{k=M+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{M-1}}. \end{aligned}$$

□

**Observació 2.3.** La distància  $d$  indueix una topologia en  $\mathcal{S}$ , que ve donada per la base d'entorns oberts  $\{\mathcal{U}_M(s)\}_{M \in \mathbb{N}}$ , on

$$\mathcal{U}_M(s) = \{s^* \in \mathcal{S} \mid s_k^* = s_k, \forall k \text{ tal que } |k| \leq M\}, \text{ amb } s \in \mathcal{S}.$$

**Definició 2.4.** Diem que un conjunt  $\mathcal{C}$  és un conjunt de Cantor si:

- (i)  $\mathcal{C}$  és compacte;
- (ii)  $\mathcal{C}$  és perfecte, és a dir, no té punts aïllats;
- (iii)  $\mathcal{C}$  és totalment disconnex.

**Proposició 2.5.** Si  $|\mathcal{A}| = N < \infty$ , l'espai mètric  $\mathcal{S}$  és un conjunt de Cantor. En particular, com que és un espai mètric compacte, és tancat.

*Demostració.* Considerem a  $\mathcal{A}$  la topologia discreta y pensem  $\mathcal{S}$  com el producte de  $\mathcal{A}$  per si mateix infinites vegades. Aleshores, la topologia de  $\mathcal{S}$  correspon amb la topologia producte induïda per  $\mathcal{A}$  i, com que  $\mathcal{A}$  és compacte,  $\mathcal{S}$  també ho és pel Teorema de Tychonoff. Com que  $\mathcal{A}$  és totalment disconnex, el producte  $\mathcal{S}$  també ho és.

Per a demostrar que  $\mathcal{S}$  no té punts aïllats cal definir una successió  $s'$  per a cada  $s \in \mathcal{S}$  i cada natural  $M$  de manera que  $s' \in \mathcal{U}_M(s)$  però  $s' \neq s$ . Agafem  $s'$  tal que  $s'_k = s_k$  per a tot  $k$  tal que  $|k| \leq M$ . Posem  $s'_{-(M+1)} \neq s_{-(M+1)}$  i els altres termes de forma arbitrària, per exemple,  $s'_k = s_k$ . Aleshores,  $s' \neq s$  però  $s' \in \mathcal{U}_M(s)$ . □

A l'espai mètric  $\mathcal{S}$  definim l'aplicació shift o shift de Bernoulli:

$$\begin{aligned}\sigma : \mathcal{S} &\longrightarrow \mathcal{S} \\ s &\longmapsto \sigma(s) = (\dots, s_{-2}, s_{-1}; s_0, s_1, \dots)\end{aligned}$$

o, dit d'una altra manera,  $(\sigma(s))_k = s_{k-1}$ . De fet, hi ha llibres en els quals es defineix l'aplicació shift com a  $\sigma^{-1}$ .

**Proposició 2.6.** *El shift de Bernoulli és un homeomorfisme.*

*Demostració.* Donat un element  $s \in \mathcal{S}$ , la preimatge de  $s$  pel shift és aquell  $s'$  tal que  $s'_k = s_{k+1}$  per a tot enter  $k$ .

Per a demostrar la continuïtat de  $\sigma$ , fixem un real positiu  $\varepsilon$  arbitrari i considerem  $\delta = 2^{-2}\varepsilon$ . Sigui  $M \in \mathbb{N}$  tal que  $\frac{1}{2^M} < \delta \leq \frac{1}{2^{M+1}}$ .

Considerem  $s, s' \in \mathcal{S}$  a distància menor que  $\delta$ . Com que  $d(s, s') < \delta \leq \frac{1}{2^{M+1}}$ , pel lema 2.2 tenim que  $s_k = s'_k$  per a tot enter  $k$  tal que  $|k| \leq M$ . La igualtat entre els elements de les successions es manté pel shift de manera que  $\sigma(s)_k = \sigma(s')_k$ ,  $\forall k$  tal que  $|k| \leq M - 1$ . Usant la segona part del lema 2.2,

$$d(\sigma(s), \sigma(s')) \leq \frac{1}{2^{M-2}} = 2^2 \frac{1}{2^M} < 2^2 \delta = \varepsilon.$$

La continuïtat de  $\sigma^{-1}$  queda assegurada amb el mateix  $\delta = \delta(\varepsilon)$ . □

Considerem el sistema dinàmic discret generat pel shift. Per començar, té  $|\mathcal{A}|$  punts fixos, que són els  $s \in \mathcal{S}$  tals que  $s_k = a$  per a tot  $k \in \mathbb{Z}$ , on  $a \in \mathcal{A}$ .

**Definició 2.7.** *Sigui  $f : X \longrightarrow X$  un homeomorfisme i  $X$  un espai mètric. Diem que un sistema dinàmic discret  $\bar{x} = f(x)$  és caòtic en sentit de Devaney si:*

- (i) *El conjunt d'òrbites periòdiques és dens en  $X$ .*
- (ii) *És topològicament transitiu. És a dir, té una òrbita densa en  $X$ .*
- (iii) *La dinàmica és sensible respecte condicions inicials. És a dir, existeix un valor  $d_0$  tal que per a tot  $s \in \mathcal{S}$  i tot entorn  $U_M(s)$  existeix un element  $s' = s'(s, M)$  tal que  $s' \in U_M(s)$  i  $d(f^n(s), f^n(s')) > d_0$  per algun  $n \in \mathbb{N}$ .*

**Lema 2.8.** *El conjunt de les òrbites periòdiques de  $\bar{s} = \sigma(s)$  és dens en  $\mathcal{S}$ .*

*Demostració.* Per a demostrar que un conjunt és dens en  $\mathcal{S}$  cal veure que conté elements de tots els oberts de  $\mathcal{S}$ . De fet, és suficient que es compleixi per a la base d'entorns de la topologia.

Per a un  $\mathcal{U}_M(s)$  arbitrari, escollim  $s' \in \mathcal{U}_M(s)$  de la manera següent: com que  $s'_k = s_k$  per a tot  $-M \leq k \leq M$ , per a que sigui una successió periòdica demanem que  $s'_{-(M+1+i)} = s'_{M-i}$  i  $s'_{M+1+i} = s'_{-(M-i)}$  per a tot  $i \in \mathbb{N}$ . Aleshores l'òrbita de  $s'$  és òrbita periòdica de període  $2M + 1$ . □

**Lema 2.9.** *El sistema dinàmic  $\bar{s} = \sigma(s)$  és topològicament transitiu.*

*Demostració.* Sigui  $s \in \mathcal{S}$ . Definim l'òrbita de  $s$  com el conjunt

$$\mathcal{O}(s) = \{ \sigma^n(s) \mid n \in \mathbb{Z} \}.$$

Anomenem 'paraula' a una subcol·lecció finita d'elements d' $\mathcal{A}$ , i 'longitud' de la paraula al nombre d'elements que té. Si construïm  $s$  de manera que contingui totes les paraules possibles, aleshores  $\mathcal{O}(s)$  serà dens en  $\mathcal{S}$ . Per a qualsevol  $U_M(s')$  només cal considerar la paraula  $\{s'_M, \dots, s'_1\}$  i donar l' $n$  tal que  $\sigma^n(s)$  té la paraula en la posició adequada, concretament centrada a l'origen.

Construïm  $s$  amb un procés iteratiu, en el qual incrementem el nombre de símbols usats. Comencem amb el primer símbol. En aquest cas, només tenim una paraula de longitud 1. Quan som al pas  $L$ , considerem els  $L$  primers símbols de  $\mathcal{A}$ . Aleshores, des de  $i = 1$  fins a  $i = L$ , escrivim totes les paraules de longitud  $i$ , posant-les a la dreta si  $i$  és parell i a l'esquerra si és senar. De fet, no cal repetir les paraules que ja s'han afegit en passos anteriors. Així, per inducció obtenim una successió amb òrbita densa en  $\mathcal{S}$ .  $\square$

**Lema 2.10.** *La dinàmica del shift és sensible respecte condicions inicials.*

*Demostració.* Fixats  $s \in \mathcal{S}$  i  $M \in \mathbb{N}$ , considerem  $s' \in \mathcal{U}_M(s)$  tal que  $s'_{-(M+1)} = s_{-(M+1)} + 1$  si aquest valor pertany a  $\mathcal{A}$ , i  $s'_{-(M+1)} = s_{-(M+1)} - 1$  en altre cas. Aleshores, com que  $(\sigma^{M+1}(s'))_0 = (\sigma^{M+1}(s))_0 \pm 1$ , es té

$$d(\sigma^{M+1}(s'), \sigma^{M+1}(s)) \geq \frac{1}{2^0} \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} > \frac{1}{4}.$$

Com que la construcció de  $s'$  val per a qualsevol parell  $s, M$  i les acotacions de  $d(\sigma^{M+1}(s'), \sigma^{M+1}(s))$  no depenen d'aquests, el lema queda demostrat.  $\square$

**Proposició 2.11.** *La dinàmica del shift és caòtica en sentit de Devaney.*

*Demostració.* La proposició queda demostrada amb els lemes 2.8, 2.9 i 2.10.  $\square$



### 3 Conjugació a la dinàmica del shift

Sigui  $Q$  el domini del pla real format pels punts  $(x, y) \in [0, 1]^2$ , i sigui  $\mu$  un nombre real tal que  $0 < \mu < 1$ , fixat a conveniència.

**Definició 3.1.** Donada una aplicació  $u : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ , diem que  $y = u(x)$  és una corba horitzontal si compleix la condició de Lipschitz amb constant de Lipschitz  $\mu$ . És a dir, per a cada parell  $0 \leq x_1, x_2 \leq 1$ ,

$$|u(x_1) - u(x_2)| \leq \mu |x_1 - x_2|.$$

Donades dues corbes horitzontals  $u_1$  i  $u_2$  tals que  $u_1(x) < u_2(x)$  per a tot  $0 \leq x \leq 1$ , anomenem banda horitzontal al conjunt

$$U = \{ (x, y) \in Q \mid u_1(x) \leq y \leq u_2(x) \}.$$

Definim el diàmetre d'una banda horitzontal per

$$d(U) = \max_{0 \leq x \leq 1} \{u_2(x) - u_1(x)\}.$$

De la mateixa manera, donada  $v : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ , diem que  $x = v(y)$  és una corba vertical si compleix que

$$|v(y_1) - v(y_2)| \leq \mu |y_1 - y_2|, \quad \text{per a } 0 \leq y_1, y_2 \leq 1.$$

Dues corbes verticals  $v_1 < v_2$  donen lloc a una banda vertical

$$V = \{ (x, y) \in Q \mid v_1(y) \leq x \leq v_2(y) \}.$$

Definim el diàmetre d'una banda vertical per

$$d(V) = \max_{0 \leq y \leq 1} \{v_2(y) - v_1(y)\}.$$

Anomenem vores horitzontals de la banda  $U$  a les gràfiques de les corbes horitzontals que la defineixen, i vores verticals al conjunt

$$\bigcup_{x'=0,1} \{ (x', y) \in Q \mid u_1(x') \leq y \leq u_2(x') \}.$$

Les vores horitzontals i verticals de  $V$  es defineixen anàlogament.

**Observació 3.2.** Les corbes horitzontals i verticals són funcions Lipschitz amb constant de Lipschitz  $\mu$ . En particular, són contínues.

**Lema 3.3.** Sigui  $\{U_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  una successió de bandes horitzontals encaixades, és a dir,  $U_{k+1} \subset U_k$ . Si  $d(U_k) \rightarrow 0$  quan  $k \rightarrow \infty$ , aleshores  $\bigcap_{k \geq 0} U_k$  és una corba horitzontal.

Anàlogament, una successió de bandes verticals encaixades, tals que el diàmetre de la  $k$ -èsima tendeix a zero quan  $k$  creix, té una corba vertical com a intersecció de totes elles.

*Demostració.* Considerem  $\mathcal{C}_u^0$  l'espai format per les funcions  $u : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  que compleixen la condició de corba horitzontal. En particular,  $\mathcal{C}_u^0$  és un subespai de l'espai de funcions contínues. Com que l'espai mètric  $[0, 1] \subset \mathbb{R}$  amb la distància euclidiana és complet,  $\mathcal{C}_u^0$  és espai mètric complet amb la distància

$$\text{dist}(u, \hat{u}) = \max_{0 \leq x \leq 1} |\hat{u}(x) - u(x)|.$$

Denotem per  $u_1^k, u_2^k$  les corbes horitzontals que defineixen a  $U_k$ . Aleshores,  $\{U_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  indueix una successió a  $\mathcal{C}_u^0$ :

$$\{u_1^1, u_2^1, u_1^2, \dots, u_1^k, u_2^k, \dots\}.$$

Observem que, per una banda,  $\text{dist}(u_1^k, u_2^k) = d(U_k)$ . Per altra banda, com que les bandes estan encaixades,  $\text{dist}(u_2^k, u_1^{k+1}) < d(U_k)$ . Així, com que  $d(U_k) \rightarrow 0$ , la successió de  $\mathcal{C}_u^0$  és de Cauchy i, per tant, convergeix a una corba horitzontal.

Per simetria, el lema se satisfà per a corbes verticals.  $\square$

**Lema 3.4.** *Una corba horitzontal  $u(x)$  i una vertical  $v(y)$  intersequen en un únic punt.*

*Demostració.* La intersecció de les dues corbes serà un punt  $(x, u(x)) \in Q$  que pertanyi a la corba vertical, és a dir, que  $v(u(x)) = x$ . Per tant, cal veure que  $v \circ u : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  té un únic punt fix.

Per les definicions de corba vertical i horitzontal, tenim que

$$|v(u(x_1)) - v(u(x_2))| \leq \mu^2 |x_1 - x_2|,$$

per a tot parell  $x_1, x_2 \in [0, 1]$ . Com que  $\mu^2 < 1$ ,  $v \circ u$  és una aplicació contractiva en  $[0, 1]$ , que és espai mètric complet. Així, pel Teorema del Punt Fix de Banach,  $v \circ u$  té un punt fix i és únic.  $\square$

Denotem per  $\mathcal{U}$  (resp.  $\mathcal{V}$ ) el conjunt de corbes horitzontals (resp. verticals). El lema anterior indueix una aplicació

$$\begin{aligned} \cap : \mathcal{U} \times \mathcal{V} &\longrightarrow Q \\ (u, v) &\longmapsto u \cap v =: z \end{aligned}$$

A  $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$ , considerem una distància producte induïda per la de l'espai de funcions contínues:

$$\begin{aligned} d((u_1, v_1), (u_2, v_2)) &= d(u_1, u_2) + d(v_1, v_2) \\ &= \max_{0 \leq x \leq 1} |u_2(x) - u_1(x)| + \max_{0 \leq y \leq 1} |v_2(y) - v_1(y)|. \end{aligned}$$

A  $Q$  considerem la 1-norma de  $\mathbb{R}^2$ :  $\|z\| = |x| + |y|$ .

**Lema 3.5.** *L'aplicació  $\cap$  és Lipschitz.*

*Demostració.* Siguin  $(u_1, v_1), (u_2, v_2)$  dos punts de  $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$ , i siguin  $z_1 = (x_1, y_1)$ ,  $z_2 = (x_2, y_2)$  les respectives imatges. Es compleix

$$\begin{aligned} |x_2 - x_1| &= |v_2(y_2) - v_1(y_1)| \leq |v_2(y_2) - v_1(y_2)| + |v_1(y_2) - v_1(y_1)| \\ &\leq d(v_1, v_2) + \mu |y_2 - y_1|, \\ |y_2 - y_1| &\leq d(u_1, u_2) + \mu |x_2 - x_1|. \end{aligned}$$

Per tant,

$$\begin{aligned} \|z_2 - z_1\| &= |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1| \leq d(u_1, u_2) + d(v_1, v_2) + \mu(|x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|) \\ &= d((u_1, v_1), (u_2, v_2)) + \mu \|z_2 - z_1\|. \end{aligned}$$

I, així,

$$d_1(z_1, z_2) \leq (1 - \mu)^{-1} d((u_1, v_1), (u_2, v_2)).$$

Com que  $\mu < 1$ , el nombre  $(1 - \mu)^{-1}$  és positiu i, per tant, constant de Lipschitz per a  $\cap$ .  $\square$

### 3.1 Primeres condicions

Sigui  $\{U_a\}_{a \in \mathcal{A}}$  (resp.  $\{V_a\}_{a \in \mathcal{A}}$ ) una successió de bandes horitzontals (resp. verticals) disjunts dos a dos. Sigui  $\phi$  una aplicació

$$\phi : Q = [0, 1]^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

que satisfà les següents condicions:

$C_1$ ) Per a tot valor  $a \in \mathcal{A}$ ,  $\phi : V_a \rightarrow U_a$  és un homeomorfisme que fa correspondre les vores horitzontals (resp. verticals) de  $V_a$  i de  $U_a$ .

$C_2$ ) Sigui  $U \subset \bigcup_{a \in \mathcal{A}} U_a$  una banda horitzontal. Per a tot  $a \in \mathcal{A}$ ,  $\phi(U) \cap U_a = \tilde{U}_a$  és banda horitzontal. A més, existeix una constant  $0 < \nu < 1$  independent de  $\mu$  tal que

$$d(\tilde{U}_a) \leq \nu d(U).$$

Sigui  $V \subset \bigcup_{a \in \mathcal{A}} V_a$  una banda vertical. Per a tot  $a \in \mathcal{A}$ ,  $\phi^{-1}(V) \cap V_a = \tilde{V}_a$  és banda vertical i, a més,

$$d(\tilde{V}_a) \leq \nu d(V).$$

Per a elements  $s_k$  de  $\mathcal{A}$ , definim recursivament els següents subconjunts:

$$\begin{aligned} U_{s_1 s_2 \dots s_n} &= \phi(U_{s_2 \dots s_n}) \cap U_{s_1}, \quad \text{per a } n \geq 2, \\ V_{s_0 s_{-1} \dots s_{-n}} &= \phi^{-1}(V_{s_{-1} \dots s_{-n}}) \cap V_{s_0}, \quad \text{per a } n \geq 1. \end{aligned}$$

**Lema 3.6.** *Les construccions anteriors són bandes horitzontals i verticals, respectivament.*

*Demostració.* Aquest lema és un resultat directe de la condició  $C_2$ . Només cal aplicar inducció sobre  $n$ .

Per a  $n = 1$ ,  $V_{s_0 s_{-1}} = \phi^{-1}(V_{s_{-1}}) \cap V_{s_0}$  i, com que  $V_{s_{-1}}$  és banda vertical,  $V_{s_0 s_{-1}}$  també ho és per construcció. Ara, suposem cert que  $V_{s'_0 s'_{-1} \dots s'_{-(n-1)}}$  és banda vertical per a qualsevol successió d'elements  $s'_k \in \mathcal{A}$ . Aleshores,  $V_{s_{-1} \dots s_{-n}}$  és banda vertical i la definició de  $V_{s_0 s_{-1} \dots s_{-n}}$  és suficient per assegurar que també ho és.

El cas de  $U_{s_1 s_2 \dots s_n}$  es demostra igual.  $\square$

Al final d'aquest apartat demostrarem que  $\phi$  restringida a un cert conjunt es pot conjuguar a l'aplicació shift introduïda en la secció anterior. Però abans necessitem obtenir un seguit de resultats que ens seran de gran utilitat.

**Lema 3.7.** *Es compleixen les igualtats següents:*

$$\begin{aligned} V_{s_0 s_{-1} \dots s_{-n}} &= \{ p \in Q \mid \phi^k(p) \in V_{s_{-k}}, \ k = 0, \dots, n \}, \\ U_{s_1 s_2 \dots s_n} &= \{ p \in Q \mid \phi^{-k}(p) \in U_{s_{k+1}}, \ k = 0, \dots, n-1 \}. \end{aligned}$$

*Demostració.* De fet, pel cas horitzontal demostrarem, per inducció, que

$$U_{s_1 s_2 \dots s_n} = \{ p \in Q \mid \phi^{-k+1}(p) \in U_{s_k}, \ k = 1, \dots, n \}.$$

Per a  $n = 2$ , es té que  $U_{s_1 s_2}$  són els punts  $p$  de  $U_{s_1}$  tals que  $\phi^{-1}(p) \in U_{s_2}$ . Per tant, els punts  $p$  tals que  $\phi^{-(k-1)}(p) \in U_{s_k}$  per a  $k = 1, 2$ .

Suposem ara que per a  $n-1$  valors de  $\mathcal{A}$  es compleix la igualtat, en particular,

$$U_{s_2 s_3 \dots s_n} = \{ p \in Q \mid \phi^{-k+2}(p) \in U_{s_k}, \ k = 2, \dots, n \}.$$

Els punts de  $U_{s_1 s_2 \dots s_n}$  són aquells  $p$  tals que  $\phi^0(p) \in U_{s_1}$  i  $\phi^{-1}(p) \in U_{s_2 s_3 \dots s_n}$ . Usant la hipòtesi d'inducció obtenim el resultat desitjat.

Pel cas vertical es demostra que

$$V_{s_0 s_{-1} \dots s_{-n}} = \{ p \in Q \mid \phi^{-k}(p) \in V_{s_k}, \ k = 0, -1, \dots, -n \}.$$

$\square$

**Corol·lari 3.8.** *Es compleix que*

$$\begin{aligned} U_{s_1 s_2 \dots s_n} &\subset U_{s_1 s_2 \dots s_{n-1}}, & \forall n \geq 2; \\ V_{s_0 s_{-1} \dots s_{-n}} &\subset V_{s_0 s_{-1} \dots s_{-(n-1)}}, & \forall n \geq 1. \end{aligned}$$

*A més, quan  $n$  tendeix a infinit, el diàmetre de les bandes tendeix a zero geomètricament.*

*Demostració.* Les inclusions són un resultat directe del lema 3.7. Ara, usant l'existència de  $0 < \nu < 1$  mencionada en la condició  $C_2$ , es té

$$d(U_{s_1 s_2 \dots s_n}) \leq \nu d(U_{s_2 \dots s_n}) \leq \nu^{n-1} d(U_{s_n}) \leq \nu^{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Anàlogament,  $d(V_{s_0 s_{-1} \dots s_{-n}}) \leq \nu^n$ , que també tendeix a zero.  $\square$

Sigui  $s = (\dots, s_{-1}, s_0; s_1, \dots)$  un element de  $\mathcal{S}$ . Introduïm

$$U(s) = \bigcap_{n \geq 2} U_{s_1 s_2 \dots s_n} \quad \text{i}$$

$$V(s) = \bigcap_{n \geq 1} V_{s_0 s_{-1} \dots s_{-n}}.$$

**Observació 3.9.** Del lema 3.3 i del corol·lari anterior es dedueix que la intersecció  $U(s)$  és corba horitzontal i que  $V(s)$  és corba vertical.

**Lema 3.10.** *El subconjunt de  $Q$*

$$\Omega = \bigcup_{s \in \mathcal{S}} U(s) \cap V(s) = \bigcap_{k \in \mathbb{Z}} \phi^k(W),$$

on  $W = \bigcup_{a \in \mathcal{A}} V_a$ , és un conjunt invariant del sistema dinàmic discret generat per  $\phi$ .

És a dir, les imatges i preimatges per  $\phi$  dels punts de  $\Omega$  pertanyen al mateix conjunt  $\Omega$ .

*Demostració.* Per a tot  $s \in \mathcal{S}$  i tot  $n \geq 1$ , es compleix que

$$U_{s_1 s_2 \dots s_n} = \bigcap_{k=1}^n \phi^k(V_{s_k}).$$

Ho demostrem per inducció sobre  $n$ : Per a  $n = 1$ ,  $U_{s_1} = \phi(V_{s_1})$ . Sigui  $n > 1$ , suposem que la hipòtesi és certa per a  $n - 1$  i per a una successió  $s'$  qualsevol. Per definició,  $U_{s_1 s_2 \dots s_n} = \phi(U_{s_2 \dots s_n}) \cap U_{s_1}$ . Aplicant la hipòtesi inductiva per a  $s'$  tal que  $s'_k = s_{k+1}$ ,

$$U_{s_1 s_2 \dots s_n} = U_{s_1} \cap \phi \left( \bigcap_{k=1}^n \phi^k(V_{s_{k+1}}) \right).$$

Com que  $\phi : V_a \rightarrow U_a$  és homeomorfisme,  $\phi$  és injectiva en  $U_{s_2}$ . Per tant,

$$U_{s_1 s_2 \dots s_n} = \phi(V_{s_1}) \cap \bigcap_{k=1}^n \phi^{k+1}(V_{s_{k+1}}) = \bigcap_{k=1}^n \phi^k(V_{s_k}).$$

Així, fent tendir  $n$  a infinit obtenim que  $U(s) = \bigcap_{k \geq 1} \phi^k(V_{s_k})$ . Anàlogament es pot

veure que  $V(s) = \bigcap_{k \leq 0} \phi^k(V_{s_k})$ . Per tant,

$$U(s) \cap V(s) = \bigcap_{k \in \mathbb{Z}} \phi^k(V_{s_k}), \quad \text{per a tot } s \in \mathcal{S}. \quad (3.1)$$

Aleshores,

$$\bigcup_{s \in \mathcal{S}} U(s) \cap V(s) = \bigcap_{k \in \mathbb{Z}} \bigcup_{s \in \mathcal{S}} \phi^k(V_{s_k}).$$

Com que per a tota successió  $s$  la posició  $k$ -èsima pot ser qualsevol element de  $\mathcal{A}$ ,

$$\bigcup_{s \in \mathcal{S}} U(s) \cap V(s) = \bigcap_{k \in \mathbb{Z}} \bigcup_{a \in \mathcal{A}} \phi^k(V_a) = \bigcap_{k \in \mathbb{Z}} \phi^k(W).$$

Un cop vista la igualtat i tenint en compte que  $\phi$  és injectiva en  $V_a$  per a tot  $a \in \mathcal{A}$ , fàcilment tenim

$$\phi^{\pm 1}(\Omega) = \bigcap_{k \in \mathbb{Z}} \phi^{k \pm 1}(W) = \bigcap_{k \in \mathbb{Z}} \phi^k(W) = \Omega.$$

□

**Teorema 3.11.** *Sigui  $|\mathcal{A}| < \infty$ . L'homeomorfisme  $\phi$  restringit a  $\Omega$  és topològicament conjugat al shift de Bernoulli. És a dir, existeix un homeomorfisme  $\tau : \mathcal{S} \rightarrow \Omega$  tal que*

$$\phi \circ \tau = \tau \circ \sigma.$$

*Demostració.* Donada una successió  $s \in \mathcal{S}$ , definim  $\tau(s) = U(s) \cap V(s)$ . Observem que  $\tau$  està ben definida per la construcció de  $\Omega$ .

Per veure la igualtat  $\phi\tau = \tau\sigma$ , utilitzem el resultat (3.1) del lema 3.10. Com que  $\sigma(s)_k = s_{k-1}$  per a tota successió  $s$ ,

$$\tau\sigma(s) = \bigcap_{k \in \mathbb{Z}} \phi^k(V_{s_{k-1}}) = \bigcap_{k \in \mathbb{Z}} \phi^{k+1}(V_{s_k}) = \phi\tau(s).$$

Veiem ara que  $\tau$  és homeomorfisme. La injectivitat es pot demostrar pel contrarecíproc. Suposem que existeixen elements  $s \neq s' \in \mathcal{S}$  tals que  $\tau(s) = \tau(s')$ . Per tant,  $U(s) \cap V(s) = p = U(s') \cap V(s')$ . Com que  $s' \neq s$ , existeix un enter  $k$  tal que  $s_k \neq s'_k$ . Aleshores, pel lema 3.7, es compleix un dels següents casos:

- Si  $k \geq 1$ ,  $p$  compleix que  $\phi^{-(k-1)}(p) \in U_{s_k} \cap U_{s'_k}$ .
- Si  $k \leq 0$ ,  $p$  compleix que  $\phi^{-k}(p) \in V_{s_k} \cap V_{s'_k}$ .

En ambdós casos es contradiu el fet de que les bandes del mateix tipus són disjundes dos a dos. Per tant, no existeixen tals elements de  $\mathcal{S}$ .

Per provar l'exhaustivitat de  $\tau$ , fixem un punt  $p \in \Omega$  arbitrari. Com que

$$p \in \bigcup_{s \in \mathcal{S}} U(s) \cap V(s),$$

existeix una successió  $s$  tal que  $\tau(s) = p$ . A més, com que  $\tau$  és injectiva, la successió és única. Definim  $\tau^{-1}(p) = s$ .

Per comprovar la continuïtat fixem dues successions  $s, s'$  tals que  $s' \in U_M(s)$ . De la construcció de les corbes  $U$  i  $V$  es dedueix que  $\tau(s)$  i  $\tau(s')$  es troben en les mateixes bandes

$$U_{s_1 s_2 \dots s_M} \quad \text{i} \quad V_{s_0 s_{-1} \dots s_{-M}}.$$

Per altra banda,

$$|\tau(s) - \tau(s')| \leq (1 - \mu)^{-1} \cdot [d(U(s), U(s')) + d(V(s), V(s'))],$$

on  $(1 - \mu)^{-1}$  és la constant de Lipschitz del lema 3.5. Com que  $U(s), U(s') \subset U_{s_1 s_2 \dots s_M}$  i  $d(U_{s_1 s_2 \dots s_M}) \leq \nu^{M-1}$ ,

$$d(U(s), U(s')) \leq \nu^{M-1}.$$

Simètricament,

$$d(V(s), V(s')) \leq \nu^M.$$

Per tant,

$$|\tau(s) - \tau(s')| \leq (1 - \mu)^{-1} \cdot [\nu^{M-1} + \nu^M].$$

Així, quan més elements en comú tenen les successions, més a prop estan les seves imatges.

Com que  $|\mathcal{A}| < \infty$ ,  $\mathcal{S}$  és conjunt de Cantor i, en particular, compacte. Aleshores, com que  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  és espai de Hausdorff, l'aplicació  $\tau$  és homeomorfisme.  $\square$

**Corol·lari 3.12.** Si  $|\mathcal{A}| = N < \infty$ , el conjunt invariant  $\Omega$  és, a més, conjunt de Cantor.

*Demostració.* Per la proposició 2.5,  $\mathcal{S}$  és tancat i conjunt de Cantor. Com que  $\tau$  és homeomorfisme,  $\tau(\mathcal{S}) = \Omega$  també és conjunt de Cantor.  $\square$

En el cas de que  $|\mathcal{A}| = \infty$ , s'ha d'afegir la condició de que els conjunts de bandes verticals i horitzontals estiguin ordenats tal i com es mostra a la figura.

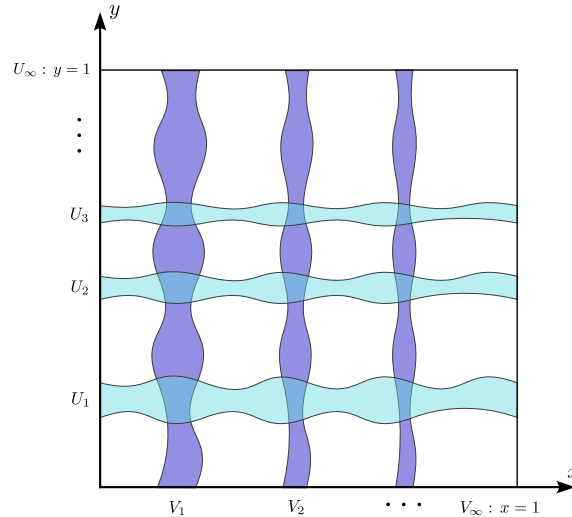


Figura 1: L'ordre en les bandes horitzontals és: si  $y_k \in U_k$ , aleshores  $y_k < y_{k+1}$  per a tot  $k$ . Denotem per  $U_\infty$  al límit de les bandes horitzontals, i l'identifiquem amb  $y = 1$ . El cas vertical és anàleg.

Per tal de compactificar l'espai de successions cal afegir les que no són doblement infinites. És a dir, successions de la forma

$$\begin{aligned} s &= (\infty, s_{b+1}, \dots, s_{d-1}, \infty), \\ s &= (\dots, s_k, \dots, s_{d-1}, \infty), \\ s &= (\infty, s_{b+1}, \dots, s_k, \dots), \end{aligned}$$

on  $b \leq 0$  i  $d \geq 1$ . Quan  $b = 0$  i  $d = 1$ , denotem la successió corresponent com  $(\infty, \infty)$ . Anomenem  $\bar{\mathcal{S}}$  al nou espai de successions. En el següent capítol demostrarem que efectivament és compacte.

L'aplicació shift d'aquest espai de successions, denotada per  $\bar{\sigma}$ , no està definida per les successions  $s \in \bar{\mathcal{S}}$  tals que  $s_0 = \infty$ . Per aquest motiu en la dinàmica de  $\bar{\sigma}$  trobem òrbites amb element final i/o amb element inicial.

Ampliem les definicions de  $U(s)$  i  $V(s)$  a les noves successions, identificant  $V_\infty$  amb  $\{x = 1\} \cap Q$  i  $U_\infty$  amb  $\{y = 1\} \cap Q$ . Així,  $\bar{\tau}$  queda definida. Com que  $\bar{\mathcal{S}}$  és compacte,  $\bar{\tau}$  és homeomorfisme. Per tant, l'aplicació  $\phi$  restringida a  $\Omega$  és topològicament conjugada a  $\bar{\sigma}$ .

Cal tenir en compte que  $\phi$  i  $\phi^{-1}$  no sempre estan definides en  $V_\infty$  i en  $U_\infty$ , respectivament. Per tant, el conjunt  $\Omega$  ampliat no és invariant per  $\phi$ . Aquest fet està relacionat amb que  $\bar{\sigma}$  no estigui definida en tot  $\bar{\mathcal{S}}$ .

La informació obtinguda és, doncs, que existeixen òrbites en  $\Omega$  que escapen del conjunt per temps positius o negatius. No només sabem que existeixen, sinó que podem conèixer-les. Per a tota  $s \in \bar{\mathcal{S}} \setminus \mathcal{S}$ , l'òrbita  $\mathcal{O}(s)$  és finita ja que existeix un enter  $n$  tal que  $\bar{\sigma}^n(s)$  no està definit. Aleshores,  $\bar{\tau}[\mathcal{O}(s)]$  és una òrbita per  $\phi$  que escapa de  $\Omega$ .

### 3.2 Compacitat de $\bar{\mathcal{S}}$

Sigui  $\mathcal{A}$  un conjunt de símbols infinit contingut en  $\mathbb{N}$ . Es defineix l'espai de successions  $\bar{\mathcal{S}}$  com

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{S}} &= \mathcal{S} \cup \{s = (\infty, s_{b+1}, \dots, s_{d-1}, \infty) \mid s_k \in \mathcal{A} \quad \forall b < k < d\} \\ &\cup \{s = (\dots, s_k, \dots, s_{d-1}, \infty) \mid s_k \in \mathcal{A} \quad \forall k < d\} \\ &\cup \{s = (\infty, s_{b+1}, \dots, s_k, \dots) \mid s_k \in \mathcal{A} \quad \forall b < k\}, \end{aligned}$$

on  $b \leq 0$  i  $d \geq 1$ . Per demostrar que aquest espai és compacte cal definir una nova distància. Donats dos elements  $s, s' \in \bar{\mathcal{S}}$ , definim aquesta distància com

$$\tilde{d}(s, s') = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2^{|k|}} \left| \frac{1}{s_k} - \frac{1}{s'_k} \right|.$$

Observem que, si  $s_k = \infty$ , aleshores  $\frac{1}{s_k} = 0$ .

**Lema 3.13.** *Considerem  $\{1, 2, \dots, N\} \subset \mathcal{A}$  com a espai de símbols finit. Aleshores, la topologia en  $\mathcal{S}$  generada per  $\tilde{d}$  és equivalent a la generada per la distància*

$$d(s, s') = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2^{|k|}} \frac{|s_k - s'_k|}{1 + |s_k - s'_k|}.$$



*Demostració.* Per demostrar que dues topologies són equivalents, cal provar que tot obert de la primera conté un obert de la segona, i viceversa. Per tant, és suficient veure que existeixen dues constants  $c_1, c_2 > 0$  tals que

$$c_1 \tilde{d}(s, s') \leq d(s, s') \leq c_2 \tilde{d}(s, s').$$

Com que les dues distàncies estan formades per sumes de termes positius i tenen un factor  $\frac{1}{2^{|k|}}$  en comú, és suficient la següent demostració:

Per una banda,

$$\left| \frac{1}{s_k} - \frac{1}{s'_k} \right| = \frac{|s'_k - s_k|}{|s_k s'_k|} = \frac{1 + |s_k - s'_k|}{|s_k s'_k|} \frac{|s'_k - s_k|}{1 + |s_k - s'_k|}.$$

Si  $s_k = s'_k$ , aleshores  $\frac{1 + |s_k - s'_k|}{|s_k s'_k|} = \frac{1}{|s_k s'_k|} \leq 1$  perquè  $s_k, s'_k \geq 1$ .

Si són nombres diferents, podem suposar que  $s_k > s'_k$ . Així,

$$\frac{1 + |s_k - s'_k|}{|s_k s'_k|} \leq \frac{1 + s_k}{|s_k s'_k|} \leq \frac{2s_k}{|s_k| |s'_k|} \leq 2.$$

Per tant, podem agafar  $c_1^{-1} = 2$ . Simètricament,

$$\frac{|s'_k - s_k|}{1 + |s_k - s'_k|} = \frac{|s_k s'_k|}{1 + |s_k - s'_k|} \left| \frac{1}{s_k} - \frac{1}{s'_k} \right|.$$

Segui  $N$  el valor màxim de  $\mathcal{A}$ , és a dir,  $N = |\mathcal{A}|$ . Aleshores, si  $s_k = s'_k$ , tenim que  $\frac{|s_k s'_k|}{1 + |s_k - s'_k|} = |s_k s'_k| \leq N^2$ . En altre cas,  $|s_k - s'_k| \geq 1$  i, per tant, es compleix que

$$\frac{|s_k s'_k|}{1 + |s_k - s'_k|} \leq |s_k s'_k| \leq N^2.$$

Així, podem posar  $c_2 = N^2$ . □

Donada una successió  $s \in \bar{\mathcal{S}}$ , es defineix la base d'entorns oberts associada com:

- (i) Si  $s \in \mathcal{S}$ , aleshores es manté la base d'oberts de la distància  $d$ . És a dir, per a cada  $M \in \mathbb{N}$  definim l'obert

$$\mathcal{U}_M(s) = \{ s^* \in \mathcal{S} \mid s_k^* = s_k, \forall k \text{ tal que } |k| \leq M \}.$$

- (ii) Si  $s$  és de la forma  $s = (\dots, s_{-1}, s_0; \dots, s_{d-1}, \infty)$  amb  $d \geq 1$ , la definim com: per a cada natural  $M$ , diem que una successió  $s'$  pertany a  $\mathcal{U}_M(s)$  si es compleixen les dues condicions següents:

- (i)  $s'_k = s_k$  per a tot  $-M \leq k < d$ ,
- (ii)  $s'_d \geq M$ .

Els casos  $s = (\infty, s_{b+1}, \dots, s_{d-1}, \infty)$  i  $s = (\infty, s_{b+1}, \dots; s_1, s_2, \dots)$  es defineixen de forma anàloga. De fet, es pot comprovar que  $\tilde{d}$  satisfà una propietat semblant al lema 2.2, de manera que la topologia aquí definida i la generada per  $\tilde{d}$  són la mateixa. A tall d'exemple, a continuació comprovem el cas de  $s = (\dots, s_k, \dots, s_{d-1}, \infty)$  i  $s'$  successió doblement infinita. Fixat  $\varepsilon > 0$ , veiem que existeix un natural  $M$  tal que si  $\tilde{d}(s, s') < \varepsilon$  aleshores  $s' \in U_M(s)$ .

Suposem que  $\tilde{d}(s, s') < \varepsilon$ . En particular, tots els sumands de la distància compleixen ser menors que  $\varepsilon$ . Per a  $k = d$ , això equival a que

$$s'_d > \frac{1}{2^d \varepsilon}.$$

Per a qualsevol altre  $k$  enter, hem de considerar per separat els següents dos casos. Si desenvolupem el cas  $s'_k \geq s_k$ , arribem a que se satisfà

$$s'_k \leq \frac{s_k}{1 - \varepsilon 2^k s_k}.$$

Observem que, aleshores,  $s_k \leq s'_k \leq \frac{s_k}{1 - \varepsilon 2^k s_k}$ . Per tant, si  $\varepsilon$  és molt petit, és necessari que  $s'_k = s_k$ . En el cas  $s'_k \leq s_k$ , s'obté que

$$s_k \geq s'_k \geq \frac{s_k}{1 - \varepsilon 2^k s_k}.$$

Per tant, agafem  $M$  enter que compleixi la desigualtat  $\frac{1}{2^d \varepsilon} \geq M$  i tal que se satisfaci el fet de que  $s'_k = s_k$  per a tot  $-M \leq k < d$ .

Veiem ara que si  $s' \in U_M(s)$  per algun natural  $M$  aleshores la distància entre elles està acotada. La distància serà

$$\tilde{d}(s, s') = \sum_{j=-(M+1)}^{-\infty} \frac{1}{2^{|j|}} \left| \frac{1}{s_k} - \frac{1}{s'_k} \right| + \frac{1}{2^d} \frac{1}{s'_k} + \sum_{k=d+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{1}{s'_k}.$$

Utilitzant que  $s_d \geq M$  i la cota  $c_1^{-1}$  de la demostració anterior,

$$\tilde{d}(s, s') \leq \sum_{j=M+1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} + \frac{1}{2^d} \frac{1}{M} + \sum_{k=d+1}^{\infty} \frac{1}{2^k}.$$

Com que les sumes convergeixen, la distància és acotada.

**Lema 3.14.** *L'espai mètric  $\bar{\mathcal{S}}$  és compacte per successions.*

*Demostració.* Sigui  $\{s^n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una successió arbitrària d'elements de  $\bar{\mathcal{S}}$ . Volem construir una successió parcial d'aquesta que sigui convergent.

Com a preàmbul, diem que una successió  $r_k$  de naturals és acotada si existeix un natural  $N$  tal que  $r_k \leq N$  per a tot  $r \in \mathbb{N}$ . En les properes línies definim, per inducció, la corresponent successió parcial.

Considerem la successió  $\{s_0^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Aleshores, o bé és acotada o bé no ho és. Si és acotada, ens trobem davant d'una successió infinita que pren valors a un conjunt finit. Per tant, existeix un element  $s_0^*$  que apareix en  $s_0^n$  infinites vegades. Aleshores, agafem la successió parcial de manera que cada element  $s_0^{n_k}$  és constant i pren el valor  $s_0^*$ . Si no és acotada, existeix una successió parcial  $\{s_0^{n_k}\}$  que tendeix a infinit. En aquest cas, prenem aquesta com a successió parcial. Així, obtenim una subfamília  $\{n_{k_1}\}_{k_1 \in \mathbb{N}}$  d'elements de  $\mathbb{N}$ , la qual defineix la successió parcial que hem escollit.

Considerem ara la successió  $\{s_1^{n_{k_1}}\}_{k_1 \in \mathbb{N}}$ . Si és acotada, ens quedem amb la parcial on cada element és constant i pren el valor  $s_1^*$ . Si no és acotada, ens quedem amb la parcial que convergeix a infinit. Obtenim així una nova subfamília  $\{n_{k_2}\}_{k_2 \in \mathbb{N}}$ , continguda en la anterior. Repetint el procés per  $\{s_{-1}^{n_{k_2}}\}_{k_2 \in \mathbb{N}}$  s'obté una nova subfamília. El procés per un costat s'atura quan arribem a una successió no acotada, ja que en la successió límit tindrem l'element  $\infty$ .

Per inducció construïm una successió parcial  $\{s^{n_{k_\infty}}\}_{k_\infty \in \mathbb{N}}$  que tendeix a  $s^*$ .

□

### 3.3 Condició alternativa

En la secció anterior hem demostrat que si  $\phi$  compleix certes condicions, aleshores és conjugada al shift de Bernoulli. Comprovar la segona condició pot arribar a ser massa costós. En canvi, com que depèn de propietats de la diferencial, aquesta nova condició és més fàcil de verificar. És necessari, però, que  $\phi$  sigui de classe  $C^1$ .

Sigui  $\{U_a\}_{a \in \mathcal{A}}$  (resp.  $\{V_a\}_{a \in \mathcal{A}}$ ) una successió de bandes horitzontals (resp. verticals) disjunctes dos a dos. Suposem que l'aplicació  $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  és de classe  $C^1$ , és a dir, diferenciable i amb diferencial contínua. Fixat un punt  $z = (x, y) \in \Omega$ , considerem l'aplicació diferencial

$$d\phi(z) : T_z\Omega \rightarrow T_{\phi(z)}\mathbb{R}^2.$$

Com que treballem en subconjunts de  $\mathbb{R}^2$ , parlarem d'espai tangent en general, sense concretar el punt. Denotem per  $(\xi, \eta)$  als seus elements, de manera que

$$(\xi_1, \eta_1) = d\phi(z)(\xi_0, \eta_0).$$

Definim la condició següent:

$C_3$ ) Existeix un real  $0 < \mu < 1$  tal que el conjunt de sectors

$$S^+ = \{(\xi, \eta) \mid |\eta| \leq \mu |\xi|\}$$

definit sobre  $\bigcup_{a \in \mathcal{A}} V_a$  compleix que  $d\phi(z)(S^+) \subset S^+$  per a tot  $z \in \bigcup_{a \in \mathcal{A}} V_a$ . A més, per a  $(\xi_0, \eta_0) \in S^+$ ,

$$|\xi_1| \geq \mu^{-1} |\xi_0|.$$

Anàlogament, el conjunt de sectors

$$S^- = \{ (\xi, \eta) \mid |\xi| \leq \mu |\eta| \}$$

definit sobre  $\bigcup_{a \in \mathcal{A}} U_a$  compleix que  $d\phi^{-1}(z)(S^-) \subset S^-$  per a tot  $z \in \bigcup_{a \in \mathcal{A}} U_a$ . A més, per a  $(\xi_0, \eta_0) \in S^-$ ,

$$|\eta_0| \geq \mu^{-1} |\eta_1|.$$

**Teorema 3.15.** *Suposem que  $0 < \mu < \frac{1}{2}$ . Si l'aplicació  $\phi$  compleix les condicions  $C_1$  i  $C_3$ , aleshores compleix la condició  $C_2$  amb constant  $\nu = \mu(1 - \mu)^{-1}$ . En particular, s'aplica el teorema 3.11.*

*Demostració.* Per demostrar el teorema només cal comprovar que es compleix la condició  $C_2$ . Separem la comprovació de les condicions per a les bandes verticals en dos passos:

1. Sigui  $V \subset \bigcup_{a \in \mathcal{A}} V_a$  una banda vertical i considerem  $V_a$  per a  $a \in \mathcal{A}$  qualsevol.

Per veure que  $\phi^{-1}(V) \cap V_a$  és banda vertical és suficient veure que, si  $\gamma(y)$  és corba vertical frontera de  $V$ ,  $\phi^{-1}(\gamma) \cap V_a$  és corba vertical. Definim  $\tilde{\gamma}(y) = \phi^{-1}(\gamma(y)) \cap V_a = \phi^{-1}(\gamma(y) \cap U_a)$ .

Siguin  $z_1, z_2$  dos punts de la gràfica de  $\gamma$  que pertanyin a  $U_a$  i denotem  $z_3 = \phi^{-1}(z_1)$ ,  $z_4 = \phi^{-1}(z_2)$  les antiimatges corresponents pertanyents a  $\tilde{\gamma}$ . Aleshores, usant el Teorema Fonamental del Càlcul, tenim que

$$z_4 - z_3 = \int_0^1 d\phi^{-1}(z_1 + t(z_2 - z_1))(z_2 - z_1) dt.$$

Com que  $z_2, z_1$  són punts de la corba vertical  $\gamma$ , escrivint la segona coordenada com a  $y_i$ , tenim que

$$|\gamma(y_2) - \gamma(y_1)| \leq \mu |y_2 - y_1|.$$

Afegint el fet de que pertanyen a  $U_a$ ,  $z_2 - z_1$  és un vector de  $S^-$  i, per tant,  $d\phi^{-1}(z_1 + t(z_2 - z_1))(z_2 - z_1)$  amb  $0 \leq t \leq 1$  també pertany a  $S^-$ . Així deduïm que  $z_4 - z_3$  és un vector de  $S^-$  i, per tant,

$$|\tilde{\gamma}(y_4) - \tilde{\gamma}(y_3)| \leq \mu |y_4 - y_3|.$$

Com que qualsevol parell de punts de la gràfica de  $\tilde{\gamma}$  tenen imatge en  $\gamma \cap U_a$  i el raonament no necessita altres condicions,  $\tilde{\gamma}$  és corba vertical.

2. Observem que, si la condició  $C_2$  és certa per a  $\nu = \frac{\mu}{1-\mu}$ , aleshores es compleix  $0 < \nu < 1$  perquè  $0 < \mu < \frac{1}{2}$ .

Posem  $\tilde{V}_a = \phi^{-1}(V) \cap V_a$ , i  $v_1, v_2$  les corbes verticals frontera de  $\tilde{V}_a$ . Siguin  $p_1, p_2$  dos punts tals que  $d(\tilde{V}_a) = \max_{0 \leq y \leq 1} \{v_2(y) - v_1(y)\} = |p_2 - p_1|$ . Per tant, la recta

$$p(t) = p_1 + t(p_2 - p_1), \quad t \in [0, 1],$$

té component  $y$  nul·la, fet pel qual el vector derivada, denotat per  $\dot{p} = (\dot{p}, 0)$ , pertany a  $S^+$ . Usant la condició  $C_3$ , la corba  $z(t) = \phi(p(t)) \subset V \cap U_a$  també té  $\dot{z} = (\dot{x}, \dot{y}) \in S^+$ . D'aquí se'n dedueix que els punts de  $z$  compleixen la propietat Lipschitz de corba horitzontal, així que podem suposar que  $z(0)$  i  $z(1)$  es troben sobre la mateixa corba horitzontal  $\hat{u}$ . Siguin  $\hat{v}_0, \hat{v}_1$  corbes verticals que passen per  $z(0), z(1)$  respectivament. Com que  $z(t) \subset V \cap U_a$ , podem suposar  $\|\hat{v}_1 - \hat{v}_0\| \leq d(V)$ . Així, usant la constant de Lipschitz del lema 3.5,

$$|z(0) - z(1)| \leq (1 - \mu)^{-1} d(V).$$

Tornant a utilitzar la condició  $C_3$ , com que  $\dot{z} = d\phi(\dot{p})$ , es té que  $|\dot{x}| \geq \mu^{-1} |\dot{p}|$ . Finalment, emprem el Teorema Fonamental del Càlcul per tenir que

$$d(\tilde{V}_a) = |p(1) - p(0)| = \int_0^1 |\dot{p}| dt,$$

on hem utilitzat que  $\dot{p}$  és constant. Usant que  $|\dot{x}| \geq \mu^{-1} |\dot{p}|$  i resolent la integral,

$$d(\tilde{V}_a) \leq \mu \int_0^1 |\dot{x}(t)| dt = \mu |x(1) - x(0)|.$$

Tal com està definida la distància per punts de  $Q$ , podem acotar  $|x(1) - x(0)|$  per  $|x(1) - x(0)| + |y(1) - y(0)| = |z(0) - z(1)|$ , i usar la cota sobre aquesta expressió per obtenir que

$$d(\tilde{V}_a) \leq \frac{\mu}{1-\mu} d(V).$$

La demostració de que  $\tilde{U}_a$  és banda horitzontal és totalment simètrica a la del cas vertical, canviant  $\phi^{-1}$  per  $\phi$  i  $S^-$  per  $S^+$ . En la demostració de que  $d(\tilde{U}_a) \leq \frac{\mu}{1-\mu} d(U)$  definim la recta  $p(t)$  de la mateixa manera, però ara és una recta vertical i, per tant,  $\dot{p} = (0, \dot{p}) \in S^-$ . Així, de la corba antiimatge  $z(t)$  s'obtenen les cotes

$$\begin{aligned} |z(0) - z(1)| &\leq (1 - \mu)^{-1} d(U) \\ |\dot{y}| &\geq \mu^{-1} |\dot{p}| \end{aligned}$$

i la cota per  $d(\tilde{U}_a)$  s'obté d'aquestes. □

## 4 El problema de Sitnikov

### 4.1 Plantejament del problema

El problema de Sitnikov és un cas restringit del problema dels tres cossos. La primera restricció consisteix en que dos dels cossos, anomenats cossos primaris, tenen la mateixa massa mentre el tercer té massa negligible.

Els cossos primaris es mouen en òrbites el·líptiques contingudes en un pla de tal manera que el centre de masses es manté fix. Aquest moviment queda determinat per la llei d'atracció de Newton. Observem, però, que la tercera massa no influeix en el moviment dels primaris.

El tercer cos es troba en la recta que passa pel centre de masses dels primaris i que és perpendicular al pla de moviment d'aquests. El problema consisteix en estudiar el moviment d'aquest tercer cos, que es troba influenciat pels primaris. La simetria imposada en el problema ens permet representar aquest moviment per una funció escalar  $z(t)$ , ja que no sortirà de la recta esmentada.

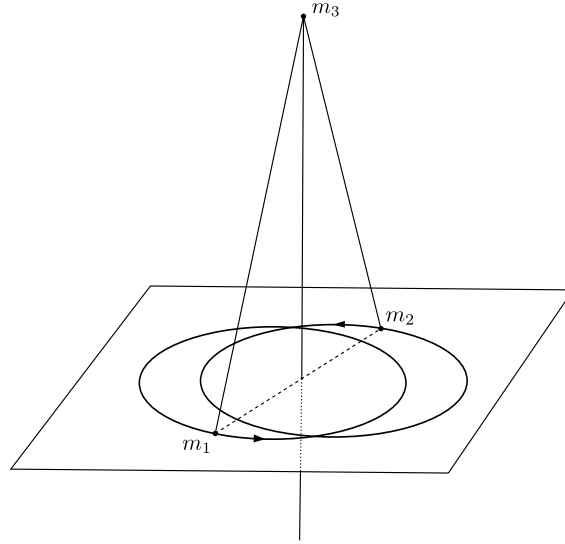


Figura 2: Representació de la posició dels cossos en el Problema de Sitnikov

Anomenem  $r(t)$  a la distància entre el centre de masses i un cos primari,  $M$  a la massa dels primaris i  $G$  a la constant de gravitació. Usant la segona llei de Newton i el Teorema de Pitàgores,

$$\ddot{z} = -\frac{G2Mz}{|z^2 + r^2(t)|^{\frac{3}{2}}}.$$

Per simplificar el problema, normalitzem algunes de les dades. Suposem  $\frac{1}{2}$  les masses dels primaris. La manera de fer-ho és per mitjà d'un canvi d'unitats de massa. Aplicant el canvi de variables  $\tilde{z} = G^{-\frac{1}{3}}z$ ,  $\tilde{r} = G^{-\frac{1}{3}}r$  al sistema, podem suposar que  $G = 1$ . Finalment, fent un canvi de variable en el temps, puc suposar que el període dels primaris és  $2\pi$ .

Aleshores,  $z(t)$  satisfà

$$\ddot{z} = -\frac{z}{|z^2 + r^2(t)|^{\frac{3}{2}}}, \quad (4.1)$$

on  $r(t)$  és la solució del problema de dos cossos

$$r(t) = \frac{1}{2}(1 - \varepsilon \cos t) + O(\varepsilon^2),$$

on  $\varepsilon \in [0, 1]$ , que suposarem petita, és l'excentricitat de les el·lipses que recorren els primaris. Aquesta solució verifica les propietats

$$\begin{aligned} r(-t) &= r(t), \\ r(t + 2\phi) &= r(t). \end{aligned}$$

A Pollard [2], entre d'altres referències, es troba l'estudi detallat de la deducció d'aquesta solució.

## 4.2 Definició de l'aplicació $\phi$

Reescrivim l'equació diferencial (4.1) introduint la funció auxiliar  $u = \dot{z}$ .

$$\begin{aligned} \dot{z} &= u \\ \dot{u} &= -\frac{z}{|z^2 + r^2(t)|^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Com a condicions inicials de l'equació diferencial, demanem que  $z(t_0) = 0$  i  $u(t_0) = v_0$ . Així,  $t_0$  és un instant de temps pel qual la solució  $z(t)$  de (4.1) passa pel pla  $z = 0$ , i  $v_0$  és la velocitat en aquest punt.

**Proposició 4.1.** *Tota solució  $z(t) \not\equiv 0$  es pot associar a un parell  $(t_0, v_0)$ .*

*Demostració.* Les solucions que no poden expressar-se d'aquesta manera són aquelles que no passen pel pla  $z = 0$ . Demostrarem que aquestes no existeixen. Suposem que  $z(t) \neq 0$  per a tot  $t \in \mathbb{R}$  pel qual la solució està definida. Aleshores o bé  $z(t) > 0$ , o bé  $z(t) < 0$ .

Si  $z(t) > 0$ , aleshores  $\ddot{z}(t) < 0$  per a tot  $t$ . Per tant  $z(t)$  és còncava, fet que contradiu la hipòtesi de que  $z(t) \neq 0$  per a tot  $t$ . En l'altre cas  $z(t)$  és negativa i convexa, que també és contradictori.  $\square$

Evidentment, la solució  $z(t) \equiv 0$  ve donada per  $t_0$  qualsevol i  $v_0 = 0$ . A més, observem que si  $v_0 = 0$  aleshores  $z(t) \equiv 0$ . És senzill veure que si  $z(t), u(t)$  és solució de (4.2) aleshores  $-z(t), -u(t)$  també és solució. Per tant, a partir de les solucions amb  $v_0 > 0$  puc obtenir tota la resta. Així, donada una solució  $z(t)$  tal que  $z(t_0) = 0$ , defineixo  $v_0 = |u(t_0)| = |\dot{z}(t_0)|$ . Conseqüentment, totes les solucions queden determinades pels parells  $(t_0, v_0)$  amb  $0 \leq t_0 < 2\pi$  i  $v_0 \geq 0$ . Identifiquem, doncs, els parells  $(t_0, v_0)$  amb coordenades polars en el pla.

Donat un parell  $(t_0, v_0)$ , denotem  $t_1$  com el següent  $t_1 > t_0$  tal que  $z(t_1) = 0$  i posem  $v_1 = |\dot{z}(t_1)|$ . Si  $t_1 < \infty$ , definim

$$\phi(t_0, v_0) = (t_1, v_1).$$

Si  $t_1 = \infty$ , vol dir que la solució escapa a infinit. Aleshores, pot ser que 'arribi' a infinit amb velocitat  $v_\infty > 0$  o  $v_\infty = 0$ . Estudiarem la situació més endavant.

**Lema 4.2. (*Domini  $D_0$* )** *Existeix una corba tancada simple en  $\mathbb{R}^2$ , que és real analítica, dins de la qual  $\phi$  està definida. Anomenem  $D_0$  l'interior d'aquesta. Per  $(t_0, v_0)$  fora de  $D_0$  les corresponents solucions escapen.*

*Demostració.* Considerem els  $(t_0, v_0)$  tals que  $t_1 = \infty$  i  $v_\infty = 0$ . Demostraré que  $v_0 = \lambda(t_0, \varepsilon)$ , on  $0 \leq \varepsilon \ll 1$ , és una pertorbació d'una circumferència. Sigui  $z(t; t_0, \varepsilon)$  una solució de (4.1) amb condició inicial  $z(t_0) = 0$ , on  $\varepsilon$  és un paràmetre. En un entorn de  $\varepsilon = 0$ ,

$$\begin{aligned} z(t; t_0, \varepsilon) &= z(t; t_0, 0) + \frac{\partial z}{\partial \varepsilon}(t; t_0, 0) \varepsilon + O(\varepsilon^2), \\ \lambda(t_0, \varepsilon) &= \dot{z}(t_0; t_0, 0) + \frac{\partial \dot{z}}{\partial \varepsilon}(t_0; t_0, 0) \varepsilon + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Si definim

$$U(z, t, \varepsilon) = (z^2 + r^2)^{-\frac{1}{2}},$$

podem escriure  $\ddot{z} = \frac{\partial U}{\partial z}(z, t, \varepsilon)$ . Observem que  $\int_t^\infty -\dot{z}\ddot{z} dt = \frac{\dot{z}^2}{2} - \frac{v_\infty^2}{2} = \frac{\dot{z}^2}{2}$ . Per tant,

$$\frac{1}{2}\dot{z}^2 = - \int_t^\infty \dot{z} \frac{\partial U}{\partial z}(z, t, \varepsilon) dt.$$

Calculem els coeficients del desenvolupament de Taylor:

- (i) Per a  $\varepsilon = 0$  tenim que  $U(z, t, 0) = U(z) = (z^2 + \frac{1}{4})^{-\frac{1}{2}}$ . Com que  $z$  és una solució que escapa i  $U(z) \rightarrow 0$  quan  $z \rightarrow \infty$ ,

$$- \int_t^\infty \dot{z} \frac{\partial U}{\partial z}(z) dt = U(z(t)) - 0.$$

Així, les solucions satisfan l'equació diferencial autònoma  $\dot{z}^2 = 2U(z)$ . Per tant, existeix una única solució  $\xi(t)$  tal que  $\xi(0) = 0$  i  $\dot{\xi}(0) > 0$ . I, a més, la solució que compleix  $\xi(t_0) = 0$  i  $\dot{\xi}(t_0) > 0$  és  $\xi(t - t_0)$ . Per tant,  $z(t; t_0, 0) = \xi(t - t_0)$ . Per altra banda, com que  $\dot{\xi}^2(0) = 2U(\xi(0)) = 2U(0) = 4$ ,

$$\dot{z}(t_0; t_0, 0) = \dot{\xi}(t_0 - t_0) = 2.$$

- (ii) Denotem  $z_1(t) = \frac{\partial z}{\partial \varepsilon}(t; t_0, 0)$ . Ens interessa conèixer  $\dot{z}_1(t_0)$ . Desenvolupant  $U$  i  $\dot{z}^2$  per Taylor, trobem que  $z_1$  satisfà

$$\dot{z}(t; t_0, 0) \dot{z}_1(t) = - \int_t^\infty \frac{\partial^2 U}{\partial \varepsilon \partial z}(z, t, 0) \dot{z}(t; t_0, \varepsilon) dt.$$



Denotem  $U_1(z, t) = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon}(z, t, 0)$ . Com que  $\frac{\partial r}{\partial \varepsilon}(t) = -\frac{1}{2} \cos t + O(\varepsilon)$ ,

$$U_1(z, t) = \frac{1}{4} \frac{\cos t}{(z^2 + \frac{1}{4})^{\frac{3}{2}}}.$$

Recordem que  $z(t; t_0, 0) = \xi(t - t_0)$  i que  $\dot{z}(t_0; t_0, 0) = 2$ . Aleshores, per a  $\varepsilon = 0$  i  $t = t_0$  se satisfà

$$2 \dot{z}_1(t_0) = - \int_{t_0}^{\infty} \frac{\partial U_1}{\partial z}(\xi, t) \dot{\xi}(t - t_0) dt.$$

Ara, apliquem el canvi de variables següent:

$$\begin{cases} \omega = \left( \xi^2 + \frac{1}{4} \right)^{\frac{1}{4}} \\ w = \omega z_1 \end{cases}$$

Aleshores,  $\dot{w} = \dot{\omega} z_1 + \omega \dot{z}_1$ . Com que  $\dot{\omega}(t_0) = C \xi(t_0 - t_0) = 0$ , obtenim la igualtat  $\sqrt{2} \dot{w}(t_0) = \dot{z}_1(t_0)$ . Així, fent un altre canvi  $s = t - t_0$ , obtenim que  $\dot{w}(t_0)$  satisfà

$$\sqrt{2} \dot{w}(t_0) = -\frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\partial U_1}{\partial z}(\xi, t_0 + s) \dot{\xi}(s) ds.$$

De fet, es pot veure que  $\frac{\partial U_1}{\partial z} = -\frac{3}{4} \xi \frac{\cos(t_0+s)}{\omega^{10}(t_0+s)}$ . Per tant, usant la igualtat trigonomètrica  $\cos(t_0 + s) = \cos(t_0) \cos(s) - \sin(t_0) \sin(s)$ , obtenim que

$$\dot{z}_1(t_0) = \sqrt{2} \dot{w}(t_0) = \frac{3}{8} [B \cos t_0 - A \sin t_0], \text{ on}$$

$$B = \int_0^{\infty} \frac{\dot{\xi} \xi \cos s}{\omega^{10}(t_0 + s)} ds, \quad A = \int_0^{\infty} \frac{\dot{\xi} \xi \sin s}{\omega^{10}(t_0 + s)} ds.$$

Per tant, en un entorn de  $\varepsilon = 0$ ,

$$\lambda(t_0, \varepsilon) = 2 + \frac{3}{8} [B \cos t_0 - A \sin t_0] \varepsilon + O(\varepsilon^2).$$

Com que per a  $\varepsilon = 0$  la corba és una circumferència de radi 2, per a  $\varepsilon > 0$  suficientment petit  $\lambda$  manté la estructura de corba simple tancada.  $\square$

**Lema 4.3. (*Simetria*)** Sigui  $\rho : (t, v) \rightarrow (-t, v)$  una simetria definida en  $\mathbb{R}^2$  amb coordenades polars i sigui  $D_1 = \rho(D_0)$ . Aleshores, la imatge de  $D_0$  per  $\phi$  és  $D_1$ . A més,

$$\phi^{-1} = \rho^{-1} \phi \rho.$$

*Demostració.* Considerem  $(z, u)$  solució de l'equació diferencial (4.2). Definim

$$\begin{aligned}\hat{z}(t) &= -z(-t), \\ \hat{u}(t) &= u(-t).\end{aligned}$$

Aleshores,  $(\hat{z}, \hat{u})$  també és solució de (4.2). Comprovem-ho:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{z}}(t) &= -\dot{z}(-t)(-1) = u(-t) = \hat{u}(t), \\ \hat{u}(t) &= -\dot{u}(-t) = \frac{z(-t)}{[(z^2(-t) + r^2(-t))^{\frac{3}{2}}]} = -\frac{\hat{z}}{(\hat{z}^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}.\end{aligned}$$

L'última igualtat és certa per la simetria  $r(t) = r(-t)$ .

Tal com hem definit l'aplicació,  $\phi^{-1}(t_0, v_0)$  és un parell  $(t_{-1}, v_{-1})$  tal que  $t_{-1}$  és, si existeix, el real més gran tal que  $t_{-1} < t_0$  i  $z(t_{-1}; t_0, v_0) = 0$ . Es defineix  $v_{-1} = |\dot{z}(t_{-1}; t_0, v_0)|$ .

Seguidament demostrem la igualtat  $\phi^{-1} = \rho^{-1}\phi\rho$ . Fixem  $(t_0, v_0)$  tal que  $\rho(t_0, v_0) \in D_0$ . Aleshores  $\phi\rho(t_0, v_0) = \phi(-t_0, v_0)$  és un parell  $(t_1, v_1)$  tal que

- $t_1$  és el real  $t_1 > -t_0$  més petit tal que  $z(t_1; -t_0, v_0) = 0$ ,
- $v_1 = |\dot{z}(t_1; -t_0, v_0)|$ .

Utilitzant la invariància de (4.2) sota  $(z_t, u_t) \rightarrow (-z_{-t}, u_{-t})$ , reescrivim el primer punt com:  $-t_1$  és el real  $-t_1 < t_0$  més gran tal que  $-z(-t_1; t_0, v_0) = 0$ . A més,  $v_1$  es pot escriure com  $v_1 = |\dot{z}(-t_1; t_0, v_0)|$ . Per tant,

$$\phi^{-1}(t_0, v_0) = (-t_1, v_1) = \rho^{-1}(t_1, v_1).$$

Com que  $\phi^{-1}$  està ben definida en  $(t_0, v_0)$  i  $\rho(t_0, v_0)$  és un element de  $D_0$ , el seu domini és  $\rho(D_0) = D_1$ . Per tant,

$$\phi : D_0 \longrightarrow \phi(D_0) = D_1.$$

□

**Lema 4.4. (*Transversalitat*)** Si  $0 < \varepsilon \ll 1$ , aleshores  $D_0 \neq D_1$ . A més, les corbes  $\partial D_0$  i  $\partial D_1$  intersequen transversalment en un punt  $P$  de la línia de simetria.

*Demostració.* Si representem  $\partial D_0$  per  $v_0 = \lambda(t_0, \varepsilon)$ , aleshores  $\partial D_1$  està representada per  $v_1 = \lambda(-t_0, \varepsilon)$ . Per tant, el punt intersecció és  $(0, \lambda(0, \varepsilon))$ . Per demostrar que es tallen transversalment cal veure que  $\frac{\partial \lambda}{\partial t_0}(0, \varepsilon) \neq 0$ . Escrivim l'expansió de Taylor d'aquesta:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t_0}(0, \varepsilon) = \frac{\partial \lambda}{\partial t_0}(0, 0) + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial t_0 \partial \varepsilon}(0, 0) \varepsilon + O(\varepsilon^2).$$

Com que  $\lambda(t_0, 0) = 2$ , es té que  $\frac{\partial \lambda}{\partial t_0}(0, 0) = 0$ . Per tant, cal veure que  $\frac{\partial^2 \lambda}{\partial t_0 \partial \varepsilon}(0, 0) \neq 0$ . De fet, es compleix que  $\frac{\partial^2 \lambda}{\partial t_0 \partial \varepsilon}(0, 0) < 0$ .

Recordem que  $\lambda$  es pot escriure com

$$\lambda(t_0, \varepsilon) = 2 + \frac{3}{8} [B \cos t_0 - A \sin t_0] \varepsilon + O(\varepsilon^2).$$

Així,  $\frac{\partial^2 \lambda}{\partial t_0 \partial \varepsilon}(t_0, \varepsilon) = \frac{3}{8} [-A \cos t_0 - B \sin t_0] + O(\varepsilon)$ . D'on obtenim que

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial t_0 \partial \varepsilon}(0, 0) = \frac{-3}{8} A.$$

Acotant es pot veure que  $A > 0$ . Els càlculs corresponents es troben a Moser [1].

□

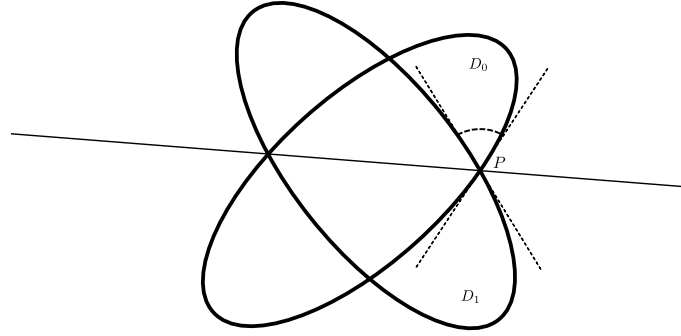


Figura 3: Domini i imatge de l'aplicació  $\phi$

El moviment del tercer cos ve donat per l'equació (4.1), on  $r(t) = \frac{1}{2}(1 - \varepsilon \cos t) + O(\varepsilon^2)$  és la distància entre un dels cossos primaris i el tercer cos. El paràmetre  $\varepsilon$  és l'excentricitat de l'òrbita el·líptica que segueixen els cossos primaris. Identifiquem els parells  $(t_0, v_0)$  amb solucions  $(z, u)$  de (4.1) que compleixen  $z(t_0) = 0$  i  $u(t_0) = \pm v_0$ .

Considerem  $D_0$  l'obert encerclat per la corba que, si  $\varepsilon \geq 0$  és prou petit, ve donada per  $\lambda(t_0, \varepsilon) = 2 + \frac{3}{8} [B \cos t_0 - A \sin t_0] \varepsilon + O(\varepsilon^2)$ . En  $D_0$  definim l'aplicació  $\phi$ . La informació que tenim és que  $\phi(D_0) = D_1$ , on  $D_1 = \rho(D_0)$ . L'aplicació  $\rho$  és una simetria del pla polar que, a més, compleix  $\phi^{-1} = \rho^{-1} \phi \rho$ .

Si  $\varepsilon = 0$ , l'òrbita dels primaris és una circumferència de radi  $\frac{1}{2}$  i  $\partial D_0$  n'és una altra de radi 2. Aleshores,  $D_1 = D_0$  i els resultats que veurem més endavant no aplicaran. En aquest cas, (4.2) és un sistema hamiltonià amb Hamiltonià

$$H(z, u) = \frac{u^2}{2} - \frac{1}{\sqrt{z^2 + \frac{1}{4}}}.$$

La informació coneguda és que si  $v_0 \geq 2$  aleshores el cos escapa i no torna a passar pel pla dels primaris. Ara, si  $v_0 < 2$ , com que  $H$  és constant sobre les solucions, es compleix que  $v_1 = v_0$ . Per tant, el temps que triga en tornar al pla dels primaris depèn només del  $v_0$  inicial. Més precisament, aquest temps tendeix a infinit quan  $v_0$  tendeix a  $\partial D_0$ , és a dir, a 2.

Si  $0 < \varepsilon \ll 1$ , ens trobem en la situació de la figura 3. Donem unes definicions prèvies a l'estudi d'aquest cas.

**Definició 4.5.** Per a  $\delta > 0$  suficientment petit definim  $D_0(\delta)$  com el conjunt de punts de  $D_0$  tals que disten de  $\partial D_0$  menys de  $\delta$ . Associem a cada  $p \in D_0(\delta)$  el punt  $q \in \partial D_0$  que està més a prop de  $p$ , i denotem per  $l_q$  la recta tangent per  $q$  de  $\partial D_0$ . Definim  $\Sigma_0, \Sigma'_0$  dos conjunts de sectors en l'espai tangent de  $D_0(\delta)$ : Donat  $p \in D_0(\delta)$ , si  $v \in T_p D_0(\delta)$  forma un angle  $\leq \delta^{\frac{1}{3}}$  amb la recta paral·lela a  $l_q$  que passa per  $p$  aleshores  $v \in \Sigma_0$ . En cas contrari,  $v \in \Sigma'_0$ . Quan vulguem precisar l'angle del sector, en aquest cas  $\delta^{\frac{1}{3}}$ , escriurem  $\Sigma_0 = \Sigma_0(\delta^{\frac{1}{3}})$ . Anàlogament, definim  $D_1(\delta)$  i els corresponents conjunts de sectors  $\Sigma_1 = \rho(\Sigma_0)$  i  $\Sigma'_1 = \rho(\Sigma'_0)$ .

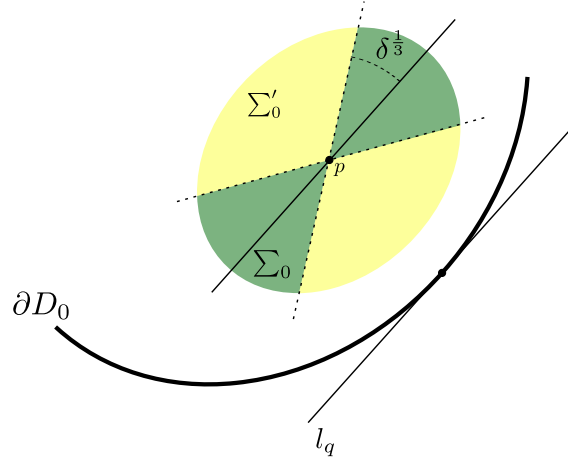


Figura 4: Representació dels conjunts  $\Sigma'_0$  i  $\Sigma_0$

### 4.3 Propietats de $\phi$

En aquesta secció el paràmetre  $\varepsilon$  és suficientment petit per a què els resultats apliquin, però diferent de 0. Per entendre l'aplicació  $\phi$  és necessari entendre el seu comportament prop de  $\partial D_0$ . Per aquest motiu, introduïm el canvi de variables de McGehee:

$$z = \frac{2}{q^2}, \quad \dot{z} = -p, \quad dt = 4q^{-3}ds$$

amb  $0 < q < \infty$ . Així,  $z \rightarrow \infty$  quan  $q \rightarrow 0$ . Aleshores, l'equació diferencial (4.1) pren la forma

$$\frac{dq}{ds} = p, \quad \frac{dp}{ds} = \frac{q}{(1 + \frac{q^4}{4}r^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \frac{dt}{ds} = \frac{4}{q^3}.$$

Suposem que  $r$  és constant. Aleshores el camp vectorial  $X(q, p) = (\frac{dq}{ds}, \frac{dp}{ds})^\top$  té l'origen com a únic punt fix. A més, aquest correspon a una sella lineal amb subespai estable  $E^s = \langle (1, -1) \rangle$  i subespai inestable  $E^u = \langle (1, 1) \rangle$ . Per a  $r(t)$ , l'origen és una òrbita periòdica i es pot veure que les varietats estable i inestable existeixen i són de la forma

$$\begin{aligned} q &= \chi(p, t) = p + O_5, \\ q &= \chi(-p, -t) = -p + O_5, \end{aligned}$$

on  $\chi$  és  $2\pi$ -periòdic respecte el temps. Si no féssim el canvi de temps l'origen seria una òrbita periòdica parabòlica.

Introduïm un canvi de coordenades per tal que, en un entorn del l'origen, la varietat inestable  $q = \chi(p, t)$  es correspongui amb l'eix d'abscisses  $y = 0$  i la varietat estable amb l'eix d'ordenades  $x = 0$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{4}(q - \chi(-p, -t)) = \frac{1}{4}(q + p) + O_5 \\ y = \frac{1}{4}(q - \chi(p, t)) = \frac{1}{4}(q - p) + O_5. \end{cases}$$

Aleshores, l'equació diferencial pren la forma

$$\begin{cases} \frac{dx}{ds} = x(1 + O_4) \\ \frac{dy}{ds} = -y(1 + O_4) \\ \frac{dt}{ds} = 4q^{-3} = \frac{1}{2}((x + y)^3 + O_4)^{-1}. \end{cases}$$

Recordem que  $q = 2(x + y) + O_5$  pren valors a  $(0, +\infty)$  i que el canvi de coordenades  $(q, p) \rightarrow (x, y)$  està ben definit en un entorn de l'origen. Per tant, el sistema anterior està definit per

$$(x, y) \in [-a, a]^2, \quad y > -x + O_5,$$

on  $a > 0$  és suficientment petit. A més,  $q = 0$  correspon a  $z = \infty$ .

Per estudiar la dinàmica del sistema anterior desfem el canvi de temps i obtenim el sistema d'equacions diferencials

$$\begin{cases} \dot{x} = x(2(x + y)^3 + O_4) = f(x, y, t) \\ \dot{y} = y(-2(x + y)^3 + O_4) = g(x, y, t). \end{cases} \quad (4.3)$$

Obtenim els següents resultats:

- (i) Si agafem condicions inicials  $(x_0, y_0)$  no negatives, al desfer el canvi de temps no s'inverteix l'orientació. Per tant, es manté la dinàmica de sella. Si les condicions estan sobre els eixos de coordenades, les solucions no sortiran de la varietat estable o inestable corresponent. Les corresponents a (4.1) arriben o escapen d'infinít amb velocitat nul·la i s'anomenen solucions parabòliques. Les altres solucions tornen al pla dels primaris, i s'anomenen solucions el·líptiques.
- (ii) Suposem que  $x_0 > 0$  i que  $y_0 < 0$ . Com que els eixos són varietats invariants, els signes en mantindran. Així, com que  $q = 2(x + y) + O_5 > 0$ , es compleix  $\dot{x} > 0$ ,  $\dot{y} > 0$  al llarg de la solució. A més,  $p = 2x - 2y + O_4 > 0$ . Per tant, corresponen a solucions de (4.1) que escapen d'infinít amb velocitat no nul·la. Les anomenem solucions hiperbòliques.
- (iii) Suposem que  $y_0 > 0$  i que  $x_0 < 0$ . Aleshores es compleix  $\dot{x} < 0$ ,  $\dot{y} < 0$  al llarg de la solució. A més,  $p = 2x - 2y + O_4 < 0$ . Per tant, corresponen a solucions de (4.1) que arriben a infinít amb velocitat no nul·la, també anomenades solucions hiperbòliques.

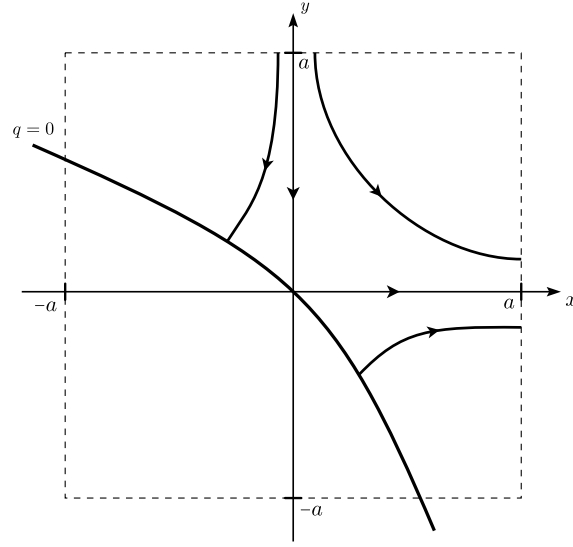


Figura 5: Retrat de fase del sistema (4.3)

Per estudiar el comportament respecte el temps de les solucions prop de  $\partial D_0$ , considerem l'equació diferencial (4.3) on les variables prenen valors

$$0 < x \leq a, \quad 0 < y \leq a, \quad 0 \leq t < 2\pi.$$

**Definició 4.6.** Per a  $\delta$  tal que  $0 < \delta \leq a < 1$ , definim les següents seccions de l'espai  $x, y, t$ :

$$A_0(\delta) = \{ (x, y, t) \mid 0 < x < \delta, y = a \},$$

$$A_1(\delta) = \{ (x, y, t) \mid x = a, 0 < y < \delta \}.$$

Sigui  $z(t; t_0, x_0, a)$ , amb  $0 < x_0 < \delta$ , una solució de (4.3) que talla a una de les seccions  $A_1$ . Definim

$$\psi(t_0, x_0) = (t_1, y_1),$$

on  $z(t_1; t_0, x_0, a) = (a, t_1)$ .

**Lema 4.7.** Sigui  $\alpha$  tal que  $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ . Si  $a$  és suficientment petit i  $\delta^{1-2\alpha} < a$ , aleshores l'aplicació

$$\psi : A_0(\delta) \longrightarrow A_1(\delta^{1-2\alpha}) \subset A_1(a)$$

està ben definida.

*Demostració.* Per demostrar aquest lema considerem l'equació diferencial (4.3) sense desfer el canvi de temps.

Com que  $\frac{dx}{ds} = x(1 + O_4)$ , si  $a$  és tan petit que  $|O_4(x_0, a)| \leq |O_4(a)| \leq \alpha$ , es compleix que

$$(1 - \alpha)x \leq \frac{dx}{ds} \leq (1 + \alpha)x.$$

Integrant per variables separades, obtenim que les solucions  $x(s)$  satisfan

$$x_0 e^{(1-\alpha)s} \leq x(s) \leq x_0 e^{(1+\alpha)s}.$$

Anàlogament,

$$y_0 e^{-(1+\alpha)s} \leq y(s) \leq y_0 e^{-(1-\alpha)s}.$$

Fem notar que aquestes cotes funcionen per a solucions amb condició inicial a  $A_0(\delta)$ . Per tant,  $y_0 = a$ . De la desigualtat per  $x$  es dedueix que existeix  $s^*$  tal que  $x(s^*) = a$ . A més,  $(1+\alpha)^{-1} \log(ax_0^{-1}) \leq s^* \leq (1-\alpha)^{-1} \log(ax_0^{-1})$ . Així, només cal veure que  $y(s^*) < \delta^{1-2\alpha}$ . Usant la desigualtat per la dreta de  $y$  i que  $e^{-(1+\alpha)s^*} \leq \frac{x_0}{a}$ ,

$$y(s^*) \leq a e^{-(1-\alpha)s^*} \leq a \left( \frac{x_0}{a} \right)^{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}} < a \left( \frac{x_0}{a} \right)^{1-2\alpha} < \delta^{1-2\alpha},$$

on hem utilitzat que  $\frac{x_0}{a} < 1$  i que  $\frac{1-\alpha}{1+\alpha} > 1-2\alpha$ .

□

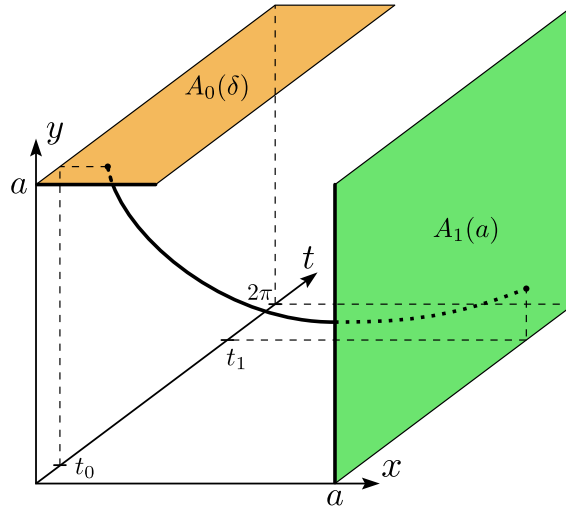


Figura 6: Representació gràfica de l'aplicació  $\psi$

**Definició 4.8.** Fixat un parell  $(t_0, x_0) \in A_0(\delta)$  i la solució de (4.3) que passa per  $(x_0, a)$  a temps  $t_0$ , considerem la solució  $z(t)$  corresponent en l'equació diferencial (4.1). Siguin  $\hat{t}_0, \hat{v}_0$  tals que  $z(\hat{t}_0) = 0$  i  $|\dot{z}(\hat{t}_0)| = \hat{v}_0$ . Definim l'aplicació  $\phi_-$  com

$$\begin{aligned} \phi_- : A_0(\delta) &\longrightarrow D_0 \\ (t_0, x_0) &\longmapsto \phi(t_0, x_0) = (\hat{t}_0, \hat{v}_0) \end{aligned}$$

Anàlogament, definim l'aplicació  $\phi_+$ :

$$\begin{aligned} \phi_+ : A_1(a) &\longrightarrow D_1 \\ (t_1, y_1) &\longmapsto \phi(t_1, y_1) = (\hat{t}_1, \hat{v}_1) \end{aligned}$$

**Proposició 4.9.** Les aplicacions  $\phi_-$ ,  $\phi_+$  són real analítiques més enllà de les fronteres de  $A_0(\delta)$ ,  $A_1(a)$  respectivament.

*Demostració.* Fixem unes condicions inicials  $(t_0, x_0) \in A_0(\delta)$  i considerem la solució  $z(t) = z(t; t_0, x_0, a)$  de l'equació diferencial (4.3). Desfent el canvi  $(q, p) \rightarrow (x, y)$ , la solució es correspon a aquella que, a temps  $t_0$ , passa per

$$\begin{aligned} q &\approx 2(x_0 + a), \\ p &\approx 2(x_0 - a). \end{aligned}$$

Per tant, la solució  $\hat{z}(t)$  de (4.1) associada a  $z(t)$  és  $\hat{z}(t; t_0, z_0, \dot{z}_0)$ , on

$$z_0 \approx \frac{1}{2(x_0 + a)^2}, \quad \dot{z}_0 \approx 2(a - x_0).$$

Els punts  $\hat{t}_0$  satisfan l'equació  $\hat{z}(\hat{t}_0; t_0, z_0, \dot{z}_0) = 0$ , on  $(t_0, x_0)$  representen variables. Fixada una solució  $z(t; t_0^*, x_0^*, a)$  qualsevol, tenim que  $z_0^* > 0$ . Per tant, la dinàmica de sella m'assegura que, encara que  $\dot{z}_0^* > 0$ , existeix un  $\hat{t}_0^*$  que compleix l'equació  $\hat{z}(\hat{t}_0^*; t_0^*, z_0^*, \dot{z}_0^*) = 0$ .

Per altra banda, com que les solucions parabòliques de (4.3) corresponen a condicions inicials de  $\partial D_0$  pel fet d'arribar a infinit amb velocitat nul·la, per continuïtat és necessari que  $\hat{v}_0 \neq 0$  a prop de la frontera. Per tant,  $|\frac{d\hat{z}}{dt}(\hat{t}_0^*; t_0^*, z_0^*, \dot{z}_0^*)| = \hat{v}_0^* \neq 0$ . Podem, doncs, aplicar el Teorema de la Funció Implícita. Així, en un entorn de  $(\hat{t}_0^*; t_0^*, z_0^*, \dot{z}_0^*)$ , existeix una aplicació

$$\hat{t}_0 = \hat{t}_0(t_0, z_0, \dot{z}_0)$$

tal que  $\hat{z}(\hat{t}_0(t_0, z_0, \dot{z}_0); t_0, z_0, \dot{z}_0) = 0$ . A més, com que l'equació diferencial (4.1) és real analítica, el flux  $z(t)$  també ho és i, pel teorema, l'aplicació  $\hat{t}_0$  és real analítica.  $\square$

**Observació 4.10.** L'aplicació  $\phi$  compleix la igualtat  $\phi = \phi_+ \psi \phi_-$ . A més, com que  $\phi_{\pm}$  són difeomorfismes més enllà de les fronteres d'on estan definides, existeix una relació entre propietats de  $\psi$  i propietats de  $\phi$ .

**Lema 4.11.** *Considerem l'aplicació  $\psi : A_0(\delta) \longrightarrow A_1(a)$ . Si  $0 < \alpha < \frac{1}{2}$  i  $a$  és suficientment petit, aleshores*

$$T(t_0, x_0) = t_1 - t_0 \geq x_0^{-\frac{3}{2}(1-2\alpha)}.$$

*Conseqüentment,  $T(t_0, x_0) \rightarrow \infty$  quan  $x_0 \rightarrow 0$ .*

*Demostració.* Com que  $\frac{dt}{ds} = \frac{1}{2}((x+y)^3 + O_4)^{-1}$ , si  $a$  és tan petit que  $|O_4(x, y)| \leq (x+y)^3$  per a tot  $0 < x, y \leq a$ , es compleix

$$\frac{dt}{ds} \geq \frac{1}{4}(x+y)^{-3}.$$

Integrant per variables separades,

$$T = t_1 - t_0 \geq \frac{1}{4} \int_0^{s^*} (x+y)^{-3} ds,$$

on  $s^*$  és tal que  $x(s^*) = a$  del lema 4.7. En Moser [1] (pàg. 170) s'acota inferiorment l'integral fins a obtenir

$$T \geq x_0^{-\frac{3}{2}(1-2\alpha)},$$

si  $x_0$  és suficientment petit.  $\square$



**Lema 4.12. (*Espirament*)** *Sigui  $\gamma$  una corba de classe  $C^1$*

$$\begin{aligned} \gamma : [0, 1] &\longrightarrow \bar{D}_0 \\ \lambda &\longmapsto \gamma(\lambda) = (t_0(\lambda), v_0(\lambda)) \end{aligned}$$

*tal que  $\gamma(0) \in \partial D_0$ ,  $\gamma \setminus \{\gamma(0)\} \subset D_0$  i tal que talla  $\partial D_0$  transversalment. Aleshores la corba imatge*

$$\begin{aligned} \bar{\gamma} : [0, 1] &\longrightarrow D_1 \\ \lambda &\longmapsto \bar{\gamma}(\lambda) = (t_1(\lambda), v_1(\lambda)) \end{aligned}$$

*s'aproxima espiralant cap a  $\partial D_1$  quan  $\lambda \rightarrow 0$ .*

*Demostració.* Sigui  $\gamma$  una corba com la de l'enunciat. Com que és suficient estudiar la propietat molt a prop de  $\partial D_1$ , podem suposar que  $\gamma \setminus \{\gamma(0)\} \subset D_0(\delta)$  per a  $\delta > 0$  tan petit com faci falta.

Hem vist que, si  $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ , quan  $x_0 \rightarrow 0$ ,

$$t_1 = t_0 + T(x_0) \longrightarrow \infty.$$

Recordem que  $x_0 = 0$  es correspon amb  $\partial D_0$ ,  $\gamma(0)$  en aquest cas. Per tant, a mesura que  $\lambda$  s'apropa a 0,  $t_1(\lambda)$  tendeix a infinit.

Per altra banda, si  $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ ,

$$y_1 < a \left( \frac{x_0}{a} \right)^{1-2\alpha} = a^{2\alpha} x_0^{1-2\alpha} < x_0^{1-2\alpha}.$$

Per tant, quan  $x_0 \rightarrow 0$ , es té  $y_1 \rightarrow 0$ . Recordem que  $y_1 = 0$  es correspon amb  $\partial D_1$ . Així, a mesura que  $\lambda$  s'apropa a 0,  $v_1$  tendeix a  $\partial D_1$ .  $\square$

Per l'últim lema que necessitem, cal estudiar l'aplicació diferencial de  $\phi$ . Per aquest motiu estudiarem la de  $\psi$  mitjançant la variacional de l'equació diferencial (4.3).

$$\begin{cases} \dot{\xi} = f_x \xi + f_y \eta + f_t \tau \\ \dot{\eta} = g_x \xi + g_y \eta + g_t \tau \\ \dot{\tau} = 0, \end{cases} \quad (4.4)$$

on les derivades de  $f$  i  $g$  estan avaluades en una solució  $(x(t), y(t))$  de (4.3). En aquest cas, diem que les solucions de (4.4) estan basades en  $(x(t), y(t))$ .

**Lema 4.13.** *Sigui  $\theta$  tal que  $\frac{1}{2} < \theta < \sqrt{\frac{7}{9}}$ . Supposem que la constant  $a$  que delimita les solucions de (4.3) és suficientment petita. Sigui  $x(t)$ ,  $y(t)$  una solució de (4.3) tal que  $y(t_0) = a$  i  $x(t_1) = a$ , i sigui  $\xi(t)$ ,  $\eta(t)$ ,  $\tau(t)$  la solució de (4.4) basada en la solució anterior. Aleshores, per a  $t_0 \leq t \leq t_1$ , se satisfà*

$$|\eta(t)| \leq \theta \sqrt{\frac{y(t)}{x(t)}} |\xi(t)|, \quad \tau(t) = 0,$$

*sempre i quan sigui cert per a  $t = t_0$ . A més, si ens trobem en la situació anterior i  $0 < x(t_0) < \delta$ , se satisfà*

$$|\xi(t_1)| \geq \sqrt{\frac{a}{x(t_0)}} |\xi(t_0)| \geq \left( \frac{a}{\delta} \right)^{\frac{1}{2}} |\xi(t_0)|.$$

*Demostració.* La demostració d'aquest lema es troba a Moser[1], pàgina 172.  $\square$

**Definició 4.14.** Fixem  $0 < \alpha < \frac{1}{3}$  i suposem  $a$  suficientment petit per tal que es compleixin totes les propietats que hem vist fins ara. Definim

$$W_0 = \{ (\xi_0, \eta_0, \tau_0) \mid (\xi_0, \eta_0, \tau_0) = (\xi^*, \eta^*, \tau^*) + \lambda(f_0, g_0, 1), \lambda \in \mathbb{R} \},$$

on  $f_0 = f(x_0, a, t_0)$ ,  $g_0 = g(x_0, a, t_0)$  per a  $(x_0, t_0) \in A_0(\delta)$ . A més, cal que se satisfaci que

$$|\eta^*| \leq \theta \sqrt{\frac{a}{x_0}} |\xi^*|.$$

Observem que de la desigualtat anterior i del lema 4.13 se'n dedueix que

$$|\eta^*(t)| \leq \theta \sqrt{\frac{y(t)}{x(t)}} |\xi^*(t)|, \quad \tau^*(t) = 0,$$

on  $(x(t), y(t))$  és una solució de (4.3) que passa per  $A_0(\delta)$ . Pel lema 4.7, en particular es compleix

$$|\eta^*(t_1)| \leq \theta \sqrt{\frac{y(t_1)}{a}} |\xi^*(t_1)|, \quad \tau^*(t_1) = 0.$$

Per tant, els vectors  $(\xi_1, \eta_1, \tau_1)$  tangents en  $\psi(t_0, x_0)$  defineixen un conjunt

$$W_1 = \{ (\xi_1, \eta_1, \tau_1) \mid (\xi_1, \eta_1, \tau_1) = (\xi^*, \eta^*, \tau^*) + \lambda(f_1, g_1, 1), \lambda \in \mathbb{R} \},$$

on  $f_1 = f(a, y_1, t_1)$ ,  $g_1 = g(a, y_1, t_1)$  per a  $(y_1, t_1) \in A_1(a)$ . En el qual se satisfà

$$|\eta_1^*| \leq \theta \sqrt{\frac{y_1}{a}} |\xi_1^*|.$$

D'aquests raonaments deduïm que per a tot  $z = (t_0, x_0) \in A_0(\delta)$  es compleix

$$d\psi(z) : W_0 \cap T_z A_0(\delta) \longrightarrow W_1 \cap T_{\psi(z)} A_1(a).$$

**Definició 4.15.** Definim les constants

$$\begin{aligned} \mu_0 &= f_0 + |g_0| \theta^{-1} \sqrt{\frac{x_0}{a}}, \\ \mu_1 &= |g_1| + |f_1| \theta \sqrt{\frac{y_1}{a}}, \end{aligned}$$

on  $f_i$  i  $g_i$  corresponen als definits en  $W_i$ . Definim els conjunts associats

$$\begin{aligned} S'_0(\mu_0) &= \{ (\xi_0, \eta_0, \tau_0) \mid \mu_0 |\tau_0| \leq |\xi_0|, \eta_0 = 0 \}, \\ S_1(\mu_1) &= \{ (\xi_1, \eta_1, \tau_1) \mid \xi_1 = 0, |\eta_1| \leq \mu_1 |\tau_1| \}. \end{aligned}$$

**Lema 4.16.** Es compleix que  $S'_0(\mu_0) \subset W_0 \cap T A_0(\delta)$ , on

$$T A_0(\delta) = \bigcup_{z \in A_0(\delta)} T_z A_0(\delta).$$

*Demostració.* Fixem un vector  $(\xi_0, \eta_0, \tau_0) \in S'_0(\mu_0)$ . Com que  $\eta_0 = 0$ , ja tenim que  $(\xi_0, \eta_0, \tau_0) \in TA_0(\delta)$ . A més,  $\lambda = -\eta^* g_0^{-1}$  i, per tant, el vector és de la forma

$$\xi_0 = \xi^* - \eta^* g_0^{-1} f_0, \quad \eta_0 = 0, \quad \tau_0 = -\eta^* g_0^{-1}.$$

Queda veure que  $(\xi_0, \eta_0, \tau_0)$  compleix

$$|\eta^*| \leq \theta \sqrt{\frac{a}{x_0}} |\xi^*|.$$

Usant la desigualtat que satisfan els elements de  $S'_0(\mu_0)$  i les igualtats per a  $\xi_0$  i  $\tau_0$ , obtenim que

$$\mu_0 |\eta^*| = \mu_0 |\tau_0 g_0| \leq |\xi_0 g_0| \leq |\xi^* g_0| + |\eta^*| f_0.$$

Tenim, doncs, que  $(\mu_0 - f_0) |\eta^*| \leq |\xi^* g_0|$ . Com que  $\mu_0 > f_0$ , el sentit de la desigualtat es manté quan dividim per  $(\mu_0 - f_0)$ . La desigualtat que volíem demostrar s'obté substituint-hi la definició de  $\mu_0$ .  $\square$

**Lema 4.17.** *Es compleix que  $W_1 \cap TA_1(a) \subset S_1(\mu_1)$ , on*

$$TA_1(a) = \bigcup_{z \in A_1(a)} T_z A_1(a).$$

*Demostració.* Sigui  $(\xi_1, \eta_1, \tau_1) \in W_1 \cap TA_1(a)$ . En particular,  $\xi_1 = 0$ . Així, podem escriure  $\lambda = -\xi^* f_1^{-1}$  i, per tant,

$$\xi_1 = 0, \quad \eta_1 = \eta^* - \xi^* f_1^{-1} g_1, \quad \tau_1 = \xi^* f_1^{-1}.$$

Per demostrar que  $(\xi_1, \eta_1, \tau_1) \in S_1(\mu_1)$ , és suficient comprovar la desigualtat

$$|\eta_1| \leq \mu_1 |\tau_1|.$$

Usant la desigualtat que satisfan els elements de  $W_1$  i les igualtats per  $\eta_1$  i  $\tau_1$ , tenim que

$$|\eta_1| \leq |\eta^*| + |\xi^* f_1^{-1} g_1| \leq \theta \sqrt{\frac{y_1}{a}} |\xi^*| + |\xi^* f_1^{-1} g_1| = \mu_1 |\tau_1|.$$

$\square$

**Lema 4.18.** *Sigui  $\delta < 0$  usat prèviament. Existeixen constants  $c_1, c_2 > 0$  tals que es compleixen les següents desigualtats:*

$$(i) \quad \mu_0 \leq c_1 \sqrt{\delta},$$

$$(ii) \quad \mu_1 \leq c_2 \delta^{\frac{1}{2}(1-2\alpha)},$$

$$(iii) \quad |\tau_1| \geq c_3^{-1} \delta^{-\frac{1}{2}} |\xi_0|.$$

*Demostració.* En els tres casos la demostració consisteix en un seguit de cotes que es troben explicades en Moser [1], pàgina 177.  $\square$

Per tant, tenim que

$$d\psi : S'_0(c_1\sqrt{\delta}) \longrightarrow S_1(c_2\delta^{\frac{1}{2}(1-2\alpha)}).$$

**Lema 4.19. (Diferenciabilitat)** *Per a  $\delta$  suficientment petit, existeix  $\beta \in (0, 1)$  tal que*

$$\begin{aligned}\phi : D_0(\delta) &\longrightarrow D_1(\delta^\beta), \\ d\phi : \Sigma'_0(\delta^{\frac{1}{3}}) &\longrightarrow \Sigma_1(\delta^{\frac{\beta}{3}}).\end{aligned}$$

A més, si  $\zeta_0 \in \Sigma'_0$ ,  $\zeta_1 = d\phi(\eta_0)$  i  $\xi_0, \xi_1$  són les projeccions de  $\zeta_i$  en la línia central de  $\Sigma'_0, \Sigma_1$  respectivament, aleshores

$$|\xi_1| \geq \delta^{-\frac{1}{3}} |\xi_0|.$$

*Demostració.* Per simplificar, separem la demostració en tres passos:

(i) Primer demostrarem que, si  $\delta$  és suficientment petit i  $0 < \alpha < \frac{1}{3}$ , aleshores

$$\phi : D_0(\delta) \longrightarrow D_1(\delta^\beta),$$

per a  $0 < \beta = 1 - 3\alpha < 1$ . Com que  $\phi_\pm$  són diferenciables més enllà de les fronteres on estan definides, existeixen constants  $c_4, c_5 > 0$  tals que per a qualsevol  $\delta$  suficientment petit es compleix

$$\begin{aligned}\phi_-(A_0(\delta)) &\supset D_0(c_4^{-1}\delta), \\ \phi_+(A_1(\delta)) &\subset D_1(c_5\delta).\end{aligned}$$

Demostrem ara que, pel  $\delta$  de l'enunciat,  $\phi(D_0(\delta)) \subset D_1(\delta^\beta)$ . Per la primera propietat, es té que  $\phi_-^{-1}(D_0(\delta)) \subset A_0(c_4\delta)$ . Pel lema 4.7, tenim que  $\psi(A_0(c_4\delta)) \subset A_1((c_4\delta)^{1-2\alpha})$ . Finalment, per la segona propietat es té que  $\phi_+(A_1((c_4\delta)^{1-2\alpha})) \subset D_1(c_5(c_4\delta)^{1-2\alpha}) \subset D_1(\delta^{1-3\alpha})$ , on hem utilitzat que  $c_5c_4^{1-2\alpha}\delta^{1-2\alpha} < \delta^{1-3\alpha}$ . Com que  $\phi = \phi_-^{-1}\psi\phi_+$ , obtenim el resultat desitjat.

(ii) Demostrem ara que, per a  $\beta = 1 - 3\alpha$ , es compleix

$$d\phi : \Sigma'_0(\delta^{\frac{1}{3}}) \longrightarrow \Sigma_1(\delta^{\frac{\beta}{3}}).$$

Si s'aproxima  $\phi_-$  per una aplicació lineal, s'observa que, si  $u = (0, 0, \tau_0)$  és un vector de  $T_z A_0(\delta)$  en la direcció de l'eix  $\tau$ , aleshores  $d\phi_-(u)$  és un vector de  $T_{\phi_-(z)} D_0$  que difereix  $O(\delta)$  de la recta paral·lela a  $l_q$ . Per a  $\phi_+$  se satisfà una propietat semblant. Per tant, per a qualsevol  $\delta$  suficientment petit existeixen constants  $c_6, c_7 > 0$  tals que

$$\begin{aligned}d\phi_- \left[ S'_0 \left( c_1 \delta^{\frac{1}{2}} \right) \right] &\supset \Sigma'_0 \left( c_6 (c_4^{-1} \delta)^{\frac{1}{3}} \right), \\ d\phi_+ \left[ S_1 \left( c_2 \delta^{\frac{1-2\alpha}{2}} \right) \right] &\subset \Sigma_1 \left( c_7 (c_4^{-1} \delta)^{\frac{1-2\alpha}{2}} \right).\end{aligned}$$

Com que  $c_6 \delta^{\frac{1}{2}} < \delta^{\frac{1}{3}}$ , tenim la inclusió  $\Sigma'_0(\delta^{\frac{1}{3}}) \subset \Sigma'_0(c_6 \delta^{\frac{1}{2}})$ . Aplicant la primera propietat, en resulta que  $\phi_-^{-1} \left[ \Sigma'_0(c_6 \delta^{\frac{1}{2}}) \right] \subset S'_0 \left( c_1 (c_4 \delta)^{\frac{1}{2}} \right)$ . Per la informació que tenim de  $d\psi$ , es compleix que  $d\psi \left[ S'_0 \left( c_1 (c_4 \delta)^{\frac{1}{2}} \right) \right] \subset S_1 \left( c_2 (c_4 \delta)^{\frac{1-2\alpha}{2}} \right)$ . Finalment, utilitzant la segona propietat,  $d\phi_+ \left[ S_1 \left( c_2 (c_4 \delta)^{\frac{1-2\alpha}{2}} \right) \right] \subset \Sigma_1 \left( c_7 \delta^{\frac{1-2\alpha}{2}} \right) \subset \Sigma_1 \left( \delta^{\frac{\beta}{3}} \right)$ , on hem usat que  $c_7 \delta^{\frac{1-2\alpha}{2}} < \delta^{\frac{1-3\alpha}{3}}$ .

- (iii) L'última propietat és una conseqüència directa de la tercera desigualtat del lema 4.18, ja que

$$|\tau_1| \geq c_3^{-1} \delta^{-\frac{1}{2}} |\xi_0| \geq \delta^{-\frac{1}{3}} |\xi_0|.$$

Cal fer notar que l'eix  $\xi$  de  $TA_0(\delta)$  es correspon amb la línia central de  $\Sigma'_0(\delta^{\frac{1}{3}})$  i l'eix  $\tau$  de  $TA_1(a)$  amb la línia central de  $\Sigma_1(\delta^{\frac{\beta}{3}})$ , amb un error  $O(\delta)$ .

□

#### 4.4 Conjugació de $\phi$ amb el shift

Sigui  $R$  el domini connex de  $D_0(\delta) \cap D_1(\delta)$  tal que  $P \in \bar{R}$ , on  $\delta > 0$  és suficientment petit. Tal com l'hem definit,  $\phi$  és de classe  $C^1$  en  $R$ . Per tant, comprovarem que se satisfan les condicions  $C_1$  i  $C_3$ .

Com que, pel lema de Transversalitat,  $\partial R \cap \partial D_1(\delta)$  correspon a dues corbes que satisfan les condicions del lema de Espiralament, el conjunt  $\phi(R)$  forma una espiral infinita que tendeix cap a  $\partial D_1$ .

Sigui  $\mathcal{A}$  un conjunt de símbols infinit i numerable, que especificarem més endavant. De moment, com que és numerable, el podem identificar amb  $\mathbb{N}$ . Considerem el subconjunt  $\phi(R) \cap R \subset R$  i observem que existeix un nombre infinit de components connexes de  $\phi(R) \cap \bar{R}$  que connecten costats oposats de  $R$ .

A aquestes components connexes les anomenem  $U_a$ , on  $a \in \mathbb{N}$ , tot seguint l'ordre que es demana en el cas de conjunt de símbols infinit. Així, el conjunt  $\{U_a\}_{a \in \mathbb{N}}$  satisfà que els elements són disjunts dos a dos. Per a tot  $a \in \mathbb{N}$ , definim  $V_a = \rho(U_a)$ , on  $\rho$  és l'aplicació definida en el lema de Simetria. Usant que  $\rho\phi\rho^{-1} = \phi^{-1}$ , i que  $\rho(R) = R$ , tenim que  $\rho(\phi(R) \cap R) = \rho\phi(R) \cap \rho(R) = \phi^{-1}(R) \cap R$ . Per tant,

$$\begin{aligned} \bigcup_{a \in \mathbb{N}} U_a &\subset \phi(R) \cap R, \\ \bigcup_{a \in \mathbb{N}} V_a &\subset \phi^{-1}(R) \cap R. \end{aligned}$$

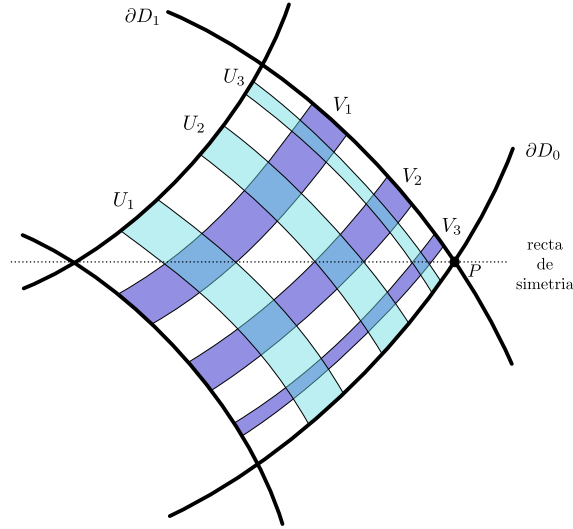


Figura 7: Construcció de les bandes

**Lema 4.20.** *Per a tot  $a \in \mathbb{N}$ ,  $U_a$  satisfà les condicions de banda horitzontal i  $V_a$  les de banda vertical.*

*Demostració.* Si linealitzem la vora de  $R$ , rotem el conjunt i el reescalem fins a obtenir el conjunt  $Q = [0, 1]^2$ , veiem que  $R$  és isomorf al conjunt  $Q$  de la secció 3, amb un error  $O(\delta)$ . Observem que l'angle de tall entre  $\partial D_0$  i  $\partial D_1$  també influeix en l'error. Per tant, per demostrar que  $U_a$  és banda horitzontal només cal veure que les corbes  $\phi(\partial D_1 \cap R) \cap R$  són corbes horitzontals.

Sigui  $z \in (\partial D_1 \cap \bar{R})$  un punt arbitrari, i sigui  $u \in \mathbb{R}^2$  un vector tangent a  $\partial D_1$  en  $z$ . Aleshores, si  $\delta$  és suficientment petit, el vector  $u$  pertany a  $\Sigma'_0(\delta^{\frac{1}{3}})$ . Així, utilitzant el lema de Diferenciabilitat, tenim que

$$d\phi_z(u) \in \Sigma_1(\delta^{\frac{\beta}{3}}).$$

Amb un canvi de coordenades en l'espai tangent, podem suposar, que  $(1, 0)$  genera la línia central de  $\Sigma'_1$  i que  $(0, 1)$  genera la línia central de  $\Sigma_1$ . Per tant, si escrivim  $d\phi_z(u) = (\xi, \eta)$ , es compleix que

$$|\xi| \leq (\delta^{\frac{1}{3}} + O(\delta)) |\eta| \leq 2\delta^{\frac{1}{3}} |\eta|.$$

Així,  $U_a$  és banda horitzontal amb constant de Lipschitz  $\mu = 2\delta^{\frac{1}{3}}$ .

Com que  $V_a = \rho(U_a)$ , satisfà les mateixes propietats que  $U_a$  però respecte  $\rho(\partial D_1) = \partial D_0$ . Per tant,  $V_a$  és banda vertical.  $\square$

**Lema 4.21.** *Per a tot  $a \in \mathbb{N}$  es compleix que*

$$\phi : V_a \longrightarrow U_a$$

*és homeomorfisme.*

*Demostració.* Per començar, observem que  $\phi : D_0 \longrightarrow D_1$  és homeomorfisme per ser composició d'homeomorfismes. Per tant, només cal veure que  $\phi(V_a) = U_a$ .

Sigui  $\gamma$  la corba que coincideix amb l'eix de simetria. Com que està tota continguda en  $D_0(\delta)$  excepte el punt  $P$ , aplicant el lema de Espirament tenim que  $\phi(\gamma) \cap \gamma$  és un conjunt infinit de punts  $\{p_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ . Podem escriure  $\gamma \cap \phi^{-1}(\gamma) = \bigcup_{k=1}^{\infty} p_k$ .

Utilitzant que  $\gamma$  i és invariant respecte  $\rho$  i que  $\phi^{-1} = \rho\phi\rho$ , és fàcil veure que aquest és un conjunt invariant de  $\phi$ :

$$\phi(\gamma \cap \phi^{-1}(\gamma)) = \phi(\gamma) \cap \gamma = \rho\phi^{-1}(\gamma) \cap \gamma = \phi^{-1}(\gamma) \cap \gamma.$$

Per tant, com que  $\phi(\gamma)$  talla en els punts  $p_k$  per ordre, tenim que

$$\phi(p_k) = p_k, \quad \text{per a tot } k \in \mathbb{N}.$$

De  $\gamma \setminus \{P\} \subset R$ , es té que  $\phi(\gamma) \subset \phi(R)$ . Com que  $\bigcup_{a \in \mathbb{N}} U_a \subset \phi(R) \cap R$ , es compleix que  $\phi(\gamma) \cap R \subset \bigcup_{a \in \mathbb{N}} U_a$ , on cada component connexa de  $\phi(\gamma) \cap R$  està continguda en cada  $U_a$ . Per tant, hi ha una correspondència bijectiva entre  $\{p_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  i  $\{U_a\}_{a \in \mathbb{N}}$ . Conseqüentment, aquesta correspondència també existeix amb  $\{\rho(U_a)\}_{a \in \mathbb{N}}$ .

Sigui  $V_a$  una banda vertical i  $p_a$  el punt fix de  $\phi$  que està contingut en  $V_a$ . Com que  $\phi(p_a) = p_a$ , és necessari que  $\phi(V_a) \subset U_a$ . Per tant,  $V_a \subset \phi^{-1}(U_a)$ . Per altra banda, utilitzant que  $\phi = \rho\phi^{-1}\rho$ , s'obté que  $\phi^{-1}(U_a) \subset V_a$ . Aleshores,

$$\phi^{-1}(U_a) = V_a.$$

□

**Observació 4.22.** El conjunt  $\gamma \cap \phi^{-1}(\gamma)$  és conjunt invariant de  $\phi$ . De fet, és un conjunt de punts fixos i, per tant, cada  $p_a$  es correspon amb una successió constant.

**Lema 4.23.** *L'aplicació  $\phi$  satisfà la condició  $C_3$  amb  $\mu = c\delta^{\frac{1}{3}}$ , on  $c > 0$  és una constant que depèn de l'angle entre  $\partial D_0$  i  $\partial D_1$ . A més,*

$$\begin{aligned} S^+ &= \Sigma_1(\delta^{\frac{1}{3}}), \\ S^- &= \Sigma_0(\delta^{\frac{1}{3}}). \end{aligned}$$

*Demostració.* Per simplificar, separem la demostració en dues parts.

(i) Demostrem que, per a tot  $z \in \bigcup_{a \in \mathbb{N}} V_a$ , es compleix que

$$d\phi(z)(\Sigma_1(\delta^{\frac{1}{3}})) \subset \Sigma_1(\delta^{\frac{1}{3}}).$$

Si  $\delta$  és suficientment petit, tenim que en  $R$  se satisfà  $\Sigma_1(\delta^{\frac{1}{3}}) \subset \Sigma'_0(\delta^{\frac{1}{3}})$ .

Aquesta inclusió està justificada perquè  $\partial D_0$  i  $\partial D_1$  es tallen en  $P$  amb un angle no nul i, per tant, existeix un  $\delta > 0$  molt petit que la compleix. Utilitzant el lema de Diferenciabilitat tenim que

$$d\phi \left[ \Sigma'_0(\delta^{\frac{1}{3}}) \right] \subset \Sigma_1(\delta^{\frac{\beta}{3}}),$$

on  $\beta = 1 - 3\alpha$  i  $0 < \alpha < \frac{1}{3}$ . Així, com que  $\delta^{-\alpha} > 1$ , arribem al resultat que buscàvem.

La desigualtat és conseqüència directa del lema de Diferenciabilitat.

(ii) Recordem que  $\phi^{-1} = \rho\phi\rho$ . Com que  $\rho(\Sigma_0) = \Sigma_1$ ,

$$d\phi^{-1}(S^-) = \rho d\phi(S^+) \subset \rho(S^+) = S^-$$

on, quan hem fet la diferencial de  $\rho\phi\rho$ , hem fet servir que  $\rho$  és lineal. La desigualtat s'obté de forma similar.

□

## 4.5 Conjunt de símbols

Sigui  $z(t)$  una solució de l'equació diferencial inicial (4.1). Considerem els elements  $\dots, t_{-1}, t_0, t_1, \dots$  tals que  $z(t_k) = 0$  i  $t_k < t_{k+1}$  per a tot  $k \in \mathbb{Z}$ . Així, associo la solució  $z(t)$  a la successió  $s = (\dots, s_{-1}, s_0; s_1, \dots)$  tal que

$$s_k = \left\lfloor \frac{t_{k+1} - t_k}{2\pi} \right\rfloor. \quad (4.5)$$

En el cas de que no existeixi un següent  $t_{k+1}$ , posem  $s_k = \infty$ . Anàlogament, si per un  $k$  no existeix un anterior  $t_{k-1}$ , posem  $s_{k-1} = \infty$ . Anomenarem oscil·lació al moviment de la solució des de que creua el pla dels primaris fins que torna a creuar. Així, el nombre enter de voltes que els primaris fan en cada oscil·lació de  $z(t)$  queda plasmat en  $s$ .

Posem, doncs,  $\mathcal{A} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ . Sigui  $(t_0, v_0)$  un punt d'una banda vertical  $V_a$ , on  $a \in \mathbb{N}$ . Aleshores, si  $\phi(t_0, v_0) = (t_1, v_1) \in U_a$ , la informació que tenim és que

$$\frac{t_1 - t_0}{2\pi} = a + \vartheta + c,$$

on  $0 \leq \vartheta < 1$  són els decimals que es descarten en la definició de  $s_k$ ,  $a$  és un símbol, i  $c$  és una constant que depèn de l'excentricitat  $\varepsilon$  i del  $\delta$  escollit. Per tant,

$$s_0 = a + \lfloor c \rfloor.$$

**Teorema 4.24.** *Existeix un natural  $m = m(\varepsilon)$  de manera que, si  $s = (\dots, s_{-1}, s_0; s_1, \dots)$  és una successió tal que  $s_k \geq m$  per a tot  $k \in \mathbb{Z}$ , aleshores existeix almenys una solució del Problema de Sitnikov que satisfà la igualtat (4.5) amb la successió  $s$ .*



*Demostració.* Per demostrar el teorema només cal observar que aquest natural  $m$  és  $\lfloor c \rfloor$ .  $\square$

Per entendre l'existència de la constant  $c$  cal observar un fet que no s'ha mencionat fins ara. Per demostrar els lemes de Espiralament i Diferenciabilitat s'han fet servir difeomorfismes per traslladar les propietats de l'homeomorfisme  $\psi$  a l'homeomorfisme  $\phi$ . El que cal notar és que les propietats de  $\psi$  es compleixen només en el subconjunt  $A_0(\delta)$  per un  $\delta$  molt petit. Per tant, si una solució no s'allunya suficient del pla dels primaris i, consegüentment, no passa per  $A_0(\delta)$ , no se li pot aplicar cap propietat obtinguda a partir de  $\psi$ . A més, l'angle de tall entre  $\partial D_0$  i  $\partial D_1$  juga un paper important en l'elecció del màxim  $\delta > 0$  tal que els resultats apliquin, ja que quant més petit sigui l'angle, més petit haurà de ser  $\delta$ . Alhora, en la demostració del lema on es prova l'existència de  $D_0$  es veu que aquest angle depèn de l'excentricitat dels primaris.

## 5 Conclusions

La conjugació d'aplicacions discretes amb el shift de Bernoulli va representar un avenç en el món dels sistemes dinàmics. Per notar-ho només cal observar la quantitat d'aplicacions conegudes com caòtiques que en algun moment s'han conjugat amb el shift. Una de les més senzilles és l'aplicació tenda. Un altre exemple és l'atractor estrany de Lorenz: si  $q$  és un punt màxim d'una solució, es defineix  $\phi(q)$  com el pròxim màxim de la mateixa solució.

Aquest mètode dona informació de  $\phi^k$  per a  $k$  enter arbitrari, mentre que les condicions que demana són només sobre  $\phi$ . A canvi, la informació que dona és només sobre un conjunt de Cantor. De fet, és aplicable a altres situacions. Una d'elles s'explica a continuació.

Sigui  $f$  un difeomorfisme definit sobre un conjunt invariant  $\Omega$ , i sigui  $p$  un punt fix del sistema. Suposem que la varietat estable i la varietat inestable de  $p$  intersequen transversalment en un punt  $r$ . Aleshores,  $\{f^k(r)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  és un conjunt de punts homoclínic. La conjugació amb el shift es pot utilitzar per estudiar la dinàmica entorn aquest tipus de punts. De fet, en el cas concret del problema de Sitnikov, el punt  $P$  juga el paper de punt homoclínic, però aquest és un cas degenerat.

Aplicant el treball d'Smale al problema de Sitnikov hem demostrat el següent. Donada una successió de nombres naturals majors que un cert  $m$ , existeix almenys una solució tal que el número de voltes que fan els primaris en el seu pla de moviment durant una oscil·lació de la solució coincideix amb el corresponent element de la successió. Com que independentment dels valors que prengui la successió existirà la solució, deduïm que el problema restringit de tres cossos té tot tipus de solucions. Per exemple, sabem que per a tot natural  $a$  major que  $m$  existeix una solució tal que el número de voltes que fan els primaris durant una oscil·lació de la solució és sempre  $a$ .

La conjugació amb el shift definit en l'espai compactificat de successions ens dona informació de l'existència de moltes més solucions. Per exemple, per a tot natural  $a$  major que  $m$  també existeix una solució tal que el número de voltes que fan els primaris durant una oscil·lació de la solució és sempre  $a$ , però a partir d'un temps concretat per la successió no torna a passar pel pla dels primaris. De fet, només coneixem aquelles que en algun moment tallen aquest pla amb un temps i velocitat pertanyents al subconjunt cantorià, però és suficient per deduir el caràcter caòtic, encara que determinista, del problema de Sitnikov.

## Referències

- [1] Moser, Jürgen: Stable and random motions in dynamical systems. With special emphasis on celestial mechanics. Hermann Weyl Lectures, the Institute for Advanced Study, Princeton, N. J. Annals of Mathematics Studies, No. 77. Princeton University Press, Princeton, N. J.; University of Tokyo Press, Tokyo, 1973.
- [2] Pollard, Harry: Mathematical introduction to celestial mechanics. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J. 1966.
- [3] Wiggins, Stephen: Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos. Texts in Applied Mathematics, 2. Springer-Verlag, New York, 1990.
- [4] Hadamard, J.: Les surfaces à courbures opposées et leurs lignes géodésiques, Journ. de Math. (5) 4, 27-73, 1898.
- [5] Smale, S.: Diffeomorphisms with many periodic points. *In* Differential and Combinatorial Topology. S. S. Cairns, Ed.: 63-80. Princeton Univ. Press. Princeton, N. J., 1965.
- [6] Sitnikov, K.: Existence of oscillating motions for the three-body problem, Dokl. Akad. Nauk, USSR, 133, no. 2, 303-306, 1960.
- [7] Alekseev, V. M.: Quasirandom dynamical systems I, II, III, Math. USSR Sbornik 5, 73-128, 1968; 6, 505-560, 1968; 7, 1-43, 1969.
- [8] Alekseev, V. M.: Mat. Zametki 6 (4), 489-498, 1969.